ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA

POR

André Perez y Marin e Carlos F. de Paula

LENTES CATHEDRATICOS DO GYMNASIO DO ESTADO EM CAMPINAS

ESTA OBRA, DESTINADA AOS GYMNASIOS
E ESCOLAS NORMAES, CONTÉM TODA A MATERIA CONSTANTE
DO PROGRAMMA DE ADMISSÃO Á
ESCOLA POLYTECHNICA DO RIO DE JANEIRO

3.ª EDIÇÃO CORRECTA E AMPLIADA

Editora-proprietaria
COMP. MELHORAMENTOS DE S. PAULO
(Weiszflog Irmãos incorporada)
S. PAULO - CAYEIRAS - RIO

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA

POR

André Perez y Marin e Carlos F. de Paula

LENTES CATHEDRATICOS DO GYMNASIO DO ESTADO EM CAMPINAS

ESTA OBRA, DESTINADA AOS GYMNASIOS
E ESCOLAS NORMAES, CONTÉM TODA A MATERIA CONSTANTE
DO PROGRAMMA DE ADMISSÃO Á
ESCOLA POLYTECHNICA DO RIO DE JANEIRO

3.ª EDIÇÃO CORRECTA E AMPLIADA

Editora-proprietaria

COMP. MELHORAMENTOS DE S. PAULO

(Weiszflog Irmãos incorporada)

S. PAULO - CAYEIRAS - RIO

PREFACIO DA 1.ª EDIÇÃO

A Geometria é incontestavelmente uma das sciencias cuja iniciação se faz segundo um methodo muito arido, não obstante ser a parte da Mathematica que melhor permitte evitar a aridez e estimular a curiosidade e o espirito de pesquiza dos alumnos.

Com effeito, não existe sciencia de união mais logica em suas partes, nem de mais rigoroso methodo em sua doutrina, que a sciencia geometrica. Baseada em um pequeno numero de axiomas e não admittindo outras verdades que as deduzidas desses principios pelo mais rigoroso raciocinio, tudo nesta sciencia é exacto, eminentemente claro e racional e póde ser facilmente comprehendido por todas as pessoas.

A difficuldade que apresentam os conhecimentos geometricos não depende, portanto, dos principios da sciencia; depende essencialmente dos meios exteriores de transmittil-os, entre os quaes occupam um logar importantissimo as figuras que auxiliam as demonstrações.

A complicação das linhas, o grande numero de letras que em algumas figuras é preciso empregar para representar os pontos e a necessidade de acompanhar essas figuras nas demonstrações, tornam-se uma grande difficuldade para os alumnos, si ellas são mal executadas e obscuras; e esta confusão material não só prejudica aos alumnos, como contribue para embaraçar a investigação da verdade aos proprios professores.

Assim, não ha sciencia em que tenham maior importancia o methodo e a clareza na exposição, nem obras que exijam maior esmero na parte material que a Geometria.

Persuadidos desta verdade, declaramos que nos foi preciso vencer grandes obstaculos, para que este trabalho não ficasse inferior em sua feição material aos melhores que deste genero se publicam no estrangeiro. Do mesmo modo, empregámos os maiores esforços para simplificar certas theorias, afim de tornal-as adaptaveis á intelligencia dos alumnos.

Na parte descriptiva da Geometria plana estudamos separadamente, primeiro as figuras rectilineas e depois as figuras circulares, por termos já seguido este methodo com vantagem no ensino; pois, não sendo preciso o conhecimento das figuras circulares para a demonstração das propriedades das figuras rectilineas, sem prejudicar por isso o rigorismo, julgamos mais racional o methodo por nós empregado. A mesma ordem seguimos na Geometria do espaço, tratando primeiro dos corpos terminados por superficies planas e depois dos corpos redondos.

Por um motivo analogo, tratamos da theoria das perpendiculares e parallelas, prescindindo das propriedades dos triangulos.

No estudo das propriedades metricas das figuras não fizemos essa distincção, por assim o exigir o methodo geometrico nesta parte, onde intervem a consideração de limites, que serve de liame logico entre aquellas duas especies de figuras.

Consagramos um Appendice ao estudo das curvas importantes, do segundo grau e transcendentes, sendo nelle tratadas todas as propriedades elementares das tres curvas do segundo grau e sua representação analytica. Das curvas transcendentes estudamos apenas as que têm maior applicação e com o desenvolvimento compativel com um tratado de Geometria elementar.

Collocamos os problemas o mais proximo possivel dos theoremas nos quaes se funda sua resolução, porque entendemos mais simples e logico fazel-o assim, para que os alumnos vejam immediatamente a applicação das propriedades que demonstram e não tenham necessidade de interromper a illação das idéas com uma grande serie de problemas consecutivos, em cuja resolução costumam confundir-se.

Si com este livro conseguirmos tornar mais facil aos alumnos o estudo importante da Geometria, e si elle merecer a approvação do professorado, a cujo juizo benevolo o submettemos, os nossos desejos ficarão plenamente satisfeitos.

Campinas, Abril de 1912.

INDICE

	Numeros	Paginas

SEGUNDA PARTE

Figuras circulares

CAPITULO PRIMEIRO

Circumferencia

CAPITULO SEGUNDO

Polygonos inscriptos e circumscriptos

CAPITULO TERCEIRO

Medida da circumferencia e sua relação com o diametro

TERCEIRA PARTE

Áreas dos polygonos e do circulo

CAPITULO PRIMEIRO

CAPITULO SEGUNDO

CAPITULO TERCEIRO

	Numeros	Paginas

Geometria no espaço

PRIMEIRA PARTE

Planos e corpos terminados por superficies planas

CAPITULO PRIMEIRO

Planos, angulos diedros e angulos polyedros

CAPITULO SEGUNDO

Corpos terminados por superficies planas

SEGUNDA PARTE

Corpos redondos

CAPITULO PRIMEIRO

Cylindro e cone

GEOMETRIA

PRELIMINARES

1. Corpo, superficie, linha e ponto geometrico. — Si em um corpo physico se fizer abstracção da materia que o constitue e de todas as suas propriedades physicas, á excepção de sua extensão, isto é, de occupar um logar no espaço infinito, ficará evidentemente um espaço limitado, da mesma fórma e grandeza que o corpo a que corresponde, e que recebe o nome de *corpo geometrico*.

Um corpo, por pequeno que seja, é extenso em todos os sentidos; mas, para os fins da sciencia, é sufficiente consideral-o extenso em tres sentidos differentes, chamados *dimensões*, e que se designam com os nomes de *comprimento*, *largura* e *altura*.

A altura recebe tambem, conforme os casos, os nomes de profundidade, grossura e espessura. Por conseguinte:

Corpo geometrico — é toda extensão que consta de tres dimensões.

Em todo corpo existe necessariamente um limite que o separa do espaço indefinido; e esse limite, que só tem as dimensões *comprimento* e *largura*, chama-se *superficie*. Portanto:

Superficie — é a extensão que tem só duas dimensões.

Os limites das superficies, ou as intersecções das superficies que se cortam mutuamente no espaço, são

chamadas *linhas*, e têm apenas uma dimensão, o *comprimento*. Portanto:

Linha — é a extensão que tem uma só dimensão.

Analogamente, as extremidades das linhas, ou as intersecções das linhas que se cortam, recebem o nome de *pontos*. Assim:

O ponto geometrico não tem dimensão alguma.

Os conceitos anteriores, corpo, superficie, linha e ponto geometrico, não existem realmente na natureza, e formam-se por *abstracções* successivas. Assim, o corpo physico, fazendo-se abstracção da sua materia, nos dá o corpo geometrico; prescindindo neste da sua altura, obtem-se a superficie; prescindindo nesta da largura, obtem-se a linha; e prescindindo nesta do comprimento, tem-se finalmente o ponto, que é o termo ultimo destas abstracções successivas.

Seguindo uma ordem inversa, póde-se conceber tambem que um ponto em movimento gera uma linha; que uma linha em movimento gera uma superficie; e, finalmente, que uma superficie em movimento gera um volume ou corpo geometrico.

Conclue-se da analyse precedente, que todo corpo póde ser considerado como formado de uma infinidade de superficies; toda superficie de uma infinidade de linhas; toda linha, de uma infinidade de pontos; e que o ponto se deve conceber simples, indivisivel, como limite elementar da extensão.

2. Ponto. — O ponto, não tendo dimensão alguma, não possue propriedades, e só se distingue pela posição que occupa. Graphicamente é representado pela intersecção de duas linhas, e é designado por uma letra collocada ao lado. Assim, se dirá (fig. 1) o ponto A, o ponto B, o ponto C.

×B ×C ×A

Fig. 1

3. Linhas. — Existe uma infinidade de linhas differentes, segundo as infinitas leis que podem reger as variações do ponto gerador; mas todas ellas podem reduzir-se a duas especies principaes: *rectas* e *curvas*.

A *linha recta* concebe-se mais facilmente do que se define, e todos têm uma noção clara pela sua imagem muito simples: a de um fio esticado e muito fino.

As suas propriedades essenciaes, pelas quaes se costuma definil-a, são duas: 1.ª, *ter todos os seus pontos na mesma direcção;* 2.ª, *ser a mais curta distancia entre dois pontos.* Graphicamente é representada como se vê em AB (fig. 2).

A ——— B

Fig. 2

Linha curva — é a que não tem parte alguma rectilinea, como CD (fig. 3).

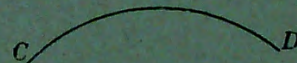



Fig. 3

A mais simples das curvas planas é denominada *circumferencia*, que tambem se concebe facilmente pela sua propriedade essencial, que serve commummente para definil-a: *ter todos os seus pontos equidistantes de um ponto interior, chamado centro.* Representa-se graphicamente como se vê na fig. 4. A uma porção AB da circumferencia chama-se *arco*, e a recta OA, que une o centro O a um ponto qualquer A da circumferencia, chama-se *raio*.

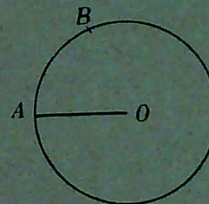



Fig. 4

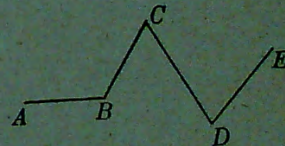
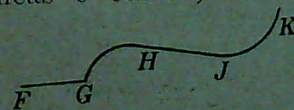
Admitte-se tambem a existencia das *linhas quebradas* ou *polygonaes*, que são as linhas formadas (fig. 5) de partes rectilineas em direcções differentes; e as linhas *mixtas*, que são formadas de partes rectilineas e curvas, como $FGHJK$ (fig. 6); mas estas denominações não estabelecem nenhuma differença essencial, servindo apenas para abreviar a linguagem.

A B C D E

Fig. 5

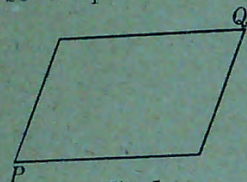
Fig. 6

4. Superficies. — Do mesmo modo que as linhas, ha infinitas especies de superficies, sendo tambem duas as principaes: *planas* e *curvas*.

Superficie plana ou *plano* é, como a linha recta, conhecida de todos, e define-se pela propriedade que tem de *poder uma recta coincidir com ella em qualquer sentido*. Um espelho commum póde dar uma idéa do plano.

Superficie curva — *é a que não tem parte alguma plana*. A noção das superficies e das linhas curvas nos é dada por innumeros objectos do mundo exterior.

Admitte-se tambem a existencia de *superficies quebradas* ou *polygonaes*, que são formadas por varios planos que se cortam dois a dois; e *superficies mixtas*, que se compõem de partes planas e curvas, podendo applicar-se aqui a observação feita nas linhas de egual denominação.

Fig. 7

Tanto as linhas como as superficies, salvo indicação contraria, devem conceber-se sempre como *indefinidas*, embora sejam representadas de um modo limitado. Um plano é representado com se vê na fig. 7.

5. Corpos. — E' infinito o numero de especies de corpos, segundo a infinidade de superficies que podem limital-os. A sua representação graphica e classificação dependem tambem das superficies que os limitam.

6. Definição e divisão da geometria; methodos empregados. — *A geometria é a sciencia que estuda as propriedades e a medida da extensão;* isto é, estuda as propriedades e a medida das linhas, das superficies e dos corpos.

A geometria, attendendo ao seu objecto, parece que deve dividir-se em tres partes: geometria das linhas, das superficies e dos corpos. Mas, como as propriedades dos corpos dependem essencialmente das propriedades das superficies que os limitam, e sendo preciso fixar as propriedades de qualquer linha na superficie em que se suppõe construida, resulta que a classificação das superficies é a que serve de base á divisão da geometria.

Classificadas as superficies em planas e não planas ou curvas, a geometria divide-se em duas partes: *a) plana; b) não plana* ou do *espaço*.

A geometria plana *trata da extensão cujos pontos estão todos num mesmo plano;* e a **geometria do espaço** *trata da extensão cujos pontos não estão todos num mesmo plano.*

Dá-se o nome de *figura* a um conjuncto qualquer de superficies, linhas ou pontos.

Duas figuras são *eguaes* quando, collocando-se uma sobre a outra, ha perfeita coincidencia em todas as suas partes.

As propriedades das figuras que estuda a geometria podem ser *descriptivas*, quando concernem ás suas fórmas e situações, e *metricas*, quando se referem ás suas grandezas.

Sendo quasi sempre *indirecta* a medida da extensão, vê-se a necessidade de conhecer grande numero de suas propriedades para conseguir a sua medida, que é o objecto final da geometria. A medida de uma linha chama-se *comprimento;* a de uma superficie, *área;* e a de um corpo, *volume*.

Distinguem-se, na demonstração dos theoremas de geometria, os *methodos geraes* e os *methodos particulares*, segundo podem applicar-se a todas as questões ou a um certo numero dellas.

Os methodos geraes são a *analyse* e a *synthese*.

Consiste a analyse em estabelecer uma serie de proposições, começando na que se deseja demonstrar, terminando numa proposição conhecida, e taes que cada uma seja uma consequencia necessaria da que se lhe segue; donde se conclue que a primeira é uma consequencia da ultima, e portanto verdadeira como esta; a analyse é, pois, um methodo de *reducção*, e é geralmente empregada na resolução dos problemas.

A synthese differe da analyse pela inversão da ordem das proposições da referida serie; consiste, pois, em partir de uma proposição conhecida, e, numa deducção de consequencias necessarias, chegar-se á proposição proposta. A synthese é um methodo de *deducção*, e emprega-se principalmente na demonstração dos theoremas.

Quadro synthetico da Geometria

Geometria plana	Geometria no espaço
PRIMEIRA PARTE Figuras rectilineas.	PRIMEIRA PARTE Planos e corpos terminados por superficies planas.
SEGUNDA PARTE Figuras circulares.	SEGUNDA PARTE Corpos redondos.
TERCEIRA PARTE Áreas dos polygonos e do circulo.	TERCEIRA PARTE Áreas e volumes dos polyedros e dos corpos redondos

Appendice

Curvas importantes.

GEOMETRIA PLANA

PRIMEIRA PARTE
FIGURAS RECTILINEAS

CAPITULO PRIMEIRO
Linha recta e angulos

I. — Propriedades e medida da linha recta

7. Propriedades. — *Dois pontos determinam a posição de uma linha recta*, isto é, por dois pontos póde passar uma linha recta e sómente *uma*, que dará a menor distancia entre esses pontos.

Conclue-se dessa propriedade: 1.º, *que duas rectas distinctas só podem ter um ponto commum*; 2.º, *que duas rectas que têm dois pontos communs coincidem*; e 3.º, *que duas rectas limitadas que têm os mesmos extremos coincidem e são eguaes*.

8. Medida da linha recta. — Sendo uma linha recta concebida, como já ficou estabelecido, infinitamente extensa nos dois sentidos, deve-se suppor sempre, na medida e comparação das linhas rectas, que se trata de segmentos de rectas: por abreviação, costuma-se omittir a designação *segmento* ou *vector*, quando se trata da medida dos segmentos de rectas.

Chama-se *segmento* ou *vector* AB (fig. 8) a porção da recta XY, percorrida indo de A para B; A é a *origem* e B a *extremidade*. Esta mesma porção da recta XY, percorrida no sentido de B para A, é chamada vector ou segmento BA.

Fig. 8

Sobre a recta XY póde-se, pois, deslocar em dois sentidos contrarios; um desses sentidos, ordinariamente o da esquerda para direita, é considerado *positivo*, e o outro *negativo*. O vector é considerado positivo ou negativo, segundo é percorrido no sentido que se encara como positivo ou negativo.

Medir um segmento de recta, ou simplesmente uma recta, é achar o numero de vezes que contém outra recta tomada por unidade. A unidade linear é o metro; e o modo geral de medir uma linha recta é collocar sobre ella todas as vezes possiveis, começando por um extremo, a unidade linear; si ficar algum resto, colloca-se sobre elle um dos divisores da unidade até não ficar resto algum, caso a recta seja commensuravel com a unidade linear, ou até ficar um resto inapreciavel, no caso de ser incommensuravel.

9. Problema. — *Determinar a maior medida commum de duas rectas dadas e a sua relação numerica.*

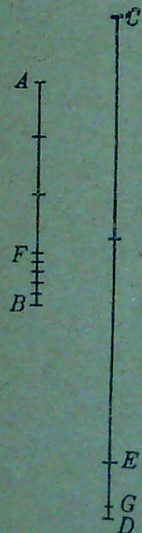
Sejam as duas rectas AB e CD (fig. 9), e $AB < CD$.

A determinação da maior medida commum é analoga ao processo arithmetico para determinar o maximo divisor commum de dois numeros dados. Vê-se, pois, quantas vezes a recta CD contém a recta AB, e supponhamos que 2 vezes e mais o resto ED; seguindo o processo indicado, admittamos que a recta AB contém 3 vezes ED e o resto FB; que a recta ED contém 1 vez FB e o resto GD, e finalmente, que FB contém exactamente 5 vezes GD. A maior medida commum procurada será o ultimo divisor GD.

Fig. 9

A relação numerica entre as duas rectas AB e CD é deduzida da operação precedente, que nos dá as egualdades es-

criptas á esquerda, e estas por substituições successivas dão as da direita:

$$CD = 2AB + ED$$
$$AB = 3ED + FB$$
$$ED = FB + GD$$
$$FB = 5GD$$
$$ED = 5GD + GD = 6GD$$
$$AB = 3 \times 6GD + 5GD = 23GD$$
$$CD = 2 \times 23GD + 6GD = 52GD$$

Vê-se, pois, que a maior medida commum GD está contida 23 vezes em AB e 52 vezes em CD; temos, pois, a relação procurada $\frac{AB}{CD} = \frac{23}{52}$.

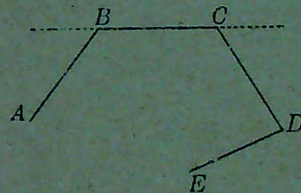



Fig. 10

10. Propriedades da linha quebrada. — Uma linha quebrada ou polygonal é dita *convexa*, quando, prolongando-se qualquer dos seus lados, fica toda inteira da mesma parte em relação ao lado prolongado (fig. 10). Em caso contrario, é chamada *concava* (fig. 11).

Uma linha polygonal convexa não póde ser cortada por uma recta em mais de dois pontos; pois si o fosse em tres, em M, N e P (fig. 11), os pontos M e P ficariam de um e outro lado do ponto N, e a linha polygonal ficaria tambem de uma e outra parte do lado BC; por conseguinte, não seria convexa.

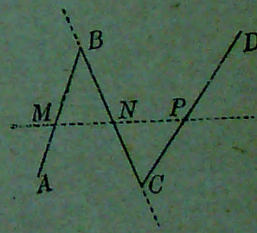



Fig. 11

Theorema

11. *Si duas linhas polygonaes convexas têm as mesmas extremidades, e uma é envolvida pela outra,*

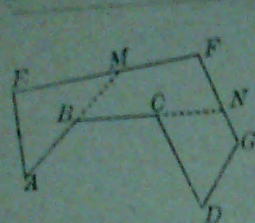



Fig. 12

a envolvida é menor que a envolvente (fig. 12).

Com effeito, prolongando os lados AB e BC da linha envolvida até encontrar a linha envolvente em M e N, temos as seguintes desegualdades:

$$AB + BM < AE + EM$$
$$BC + CN < BM + MF + FN$$
$$CD < CN + NG + GD.$$

Sommando ordenadamente e depois simplificando, acha-se:

$$AB + BC + CD < AE + EF + FG + GD.$$

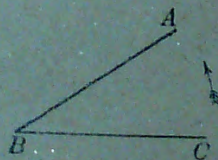
O theorema é tambem certo, e demonstra-se do mesmo modo, quando uma das linhas é envolvida completamente pela outra, sem terem nenhuma extremidade commum.

II. — Perpendiculares e obliquas

12. Angulo. — *Chama-se angulo a inclinação de duas rectas que têm uma extremidade commum, chamada vertice do angulo.*

As duas rectas BA e BC (fig. 13), que formam o angulo, chamam-se *lados* do angulo, e a extremidade commum B é o *vertice*.

Fig. 13

Si a recta BC girar em torno do ponto B, sem deixar o plano, no sentido indicado pela flecha, até coincidir com a recta BA, terá descripto um certo angulo que será definido por estas duas rectas. Si BC girasse em sentido contrario e viesse a coincidir com BA, teria descripto um outro angulo, que seria ainda definido pelas duas rectas. Para evitar ambiguidade, chamaremos ao primeiro angulo um ***angulo saliente*** e ao segundo um ***angulo reintrante***.

Designa-se um angulo com tres letras: a letra de um dos lados, a do vertice e a do segundo lado. Quando o angulo está isolado, póde-se designal-o apenas com a letra do vertice. Assim, o angulo da figura 13 póde ser lido: o angulo ABC ou CBA, ou simplesmente o angulo B.

Obtêm-se todos os angulos possiveis fazendo girar uma recta OA em torno do ponto O (fig. 14).

Para seguir mais facilmente o movimento desta recta, consideremos a circumferencia que descreve um de seus pontos, A por exemplo. Quando o ponto A tiver percorrido um arco AB, menor que meia circumferencia, a recta OA terá descripto um angulo saliente; e quando percorrer um arco AC, maior que meia circumferencia, será reintrante o angulo por ella descripto.

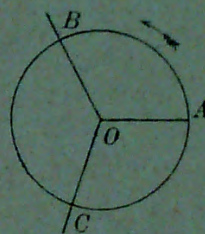



Fig. 14

De todos os angulos que póde descrever a recta OA, são esses dois os que nos interessam para o estudo que devemos fazer.

Por esse modo de geração dos angulos, vê-se que a grandeza de um angulo não depende do comprimento dos lados, que se consideram prolongados indefinidamente, e que existe uma relação de dependencia entre a grandeza de um angulo e a do arco descripto por um ponto situado sobre o lado.

Dependendo o valor do angulo da maior ou menor inclinação dos seus lados, conclue-se que dois angulos são eguaes quando, coincidindo o vertice e um lado de cada angulo, coincidem tambem os outros dois lados.

13. Angulos adjacentes. — *Chamam-se angulos adjacentes dois angulos que têm o mesmo vertice e são situados de uma parte e de outra de um lado commum.* Por exemplo, os angulos ABC e CBD (fig. 15), EOF e FOG (fig. 16). Os angulos adjacentes da figura 15 têm os lados exteriores AB e BD em linha recta; o mesmo não se dá com os angulos da figura 16. Convem notar que são os angulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha recta, os que geralmente se consideram.

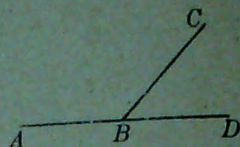



Fig. 15

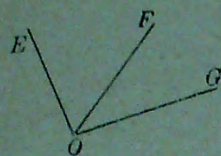



Fig. 16

14. Angulos oppostos pelo vertice. — *Angulos oppostos pelo vertice são dois angulos taes, que os lados de cada um vêm a ser o prolongamento dos lados do outro.* Assim, os angulos AOD e COB (fig. 27), bem como os angulos AOC e BOD, são angulos oppostos pelo vertice.

15. Bissectriz de um angulo. — *Chama-se bissectriz de um angulo a recta que o divide em duas partes eguaes.* Assim, a recta BC (fig. 17) é a bissectriz do angulo ABD, suppondo eguaes os angulos ABC e CBD.

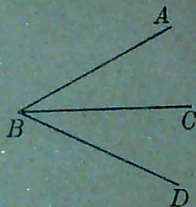



Fig. 17

16. Perpendiculares e obliquas. — Uma recta é perpendicular a outra, quando aquella fórma com esta dois angulos adjacentes eguaes. Assim, suppondo eguaes os angulos adjacentes ADC e CDE (fig. 18), a recta CD é perpendicular a AE.

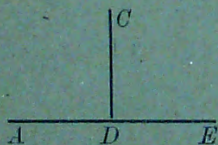



Fig. 18

Uma recta HG (fig. 19), é *obliqua* a outra EF,

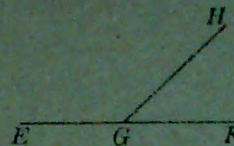



Fig. 19

quando os angulos adjacentes EGH e HGF, que ellas formam, são deseguaes.

17. Angulo recto, agudo e obtuso. — *Chama-se angulo recto um angulo cujos lados são perpendiculares entre si.* Assim, qualquer dos angulos adjacentes ADC ou CDE, da figura 18, é recto.

O angulo menor que o recto é chamado *agudo*, e o maior que o recto chama-se angulo *obtuso*.

18. Angulos complementares e supplementares. — Chama-se *somma* de dois angulos, o angulo obtido, dispondo os dois angulos um ao lado do outro, de modo que os seus vertices coincidam e tenham um lado commum.

Dois angulos são complementares, ou um delles é o complemento do outro, quando a sua somma é egual a um recto.

Dois angulos são supplementares, ou um delles é o supplemento do outro, quando a sua somma vale dois rectos.

Dois angulos que têm o mesmo complemento ou o mesmo supplemento são eguaes, pois que lhes falta o mesmo angulo para valerem um angulo recto no primeiro caso, ou dois rectos no segundo caso.

THEOREMA

19. *Por um ponto de uma recta* **póde-se levantar uma perpendicular a essa recta e sómente uma** (fig. 20).

HYPOTHESE: Seja a recta AB e o ponto C.

THESE: Pelo ponto C póde-se levantar uma perpendicular á recta AB e sómente uma.

DEMONSTRAÇÃO: Tracemos pelo ponto C uma recta qualquer CD. Si os angulos adjacentes ACD e DCB fossem eguaes, a recta CD seria, por definição (16), perpendicular á recta AB. Si os angulos não são eguaes, supponhamos o angulo DCB menor que ACD, e façamos girar a recta CD em torno

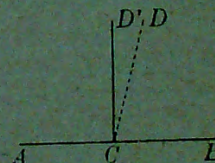
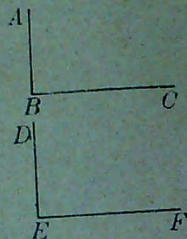



Fig. 20

do ponto C, até que venha a coincidir com a recta CA. Neste movimento, o angulo DCB augmenta de uma maneira continua, e o outro angulo ACD diminue tambem continuamente até annullar-se. A recta CD tomará, pois, necessariamente, uma posição particular e uma só, em que os dois angulos adjacentes serão eguaes. Seja CD' essa posição particular; teremos pelo exposto que CD' é a unica perpendicular que se póde levantar a AB pelo ponto C.

20. Corollario. — *Todos os angulos rectos* **são eguaes** (fig. 21).

Fig. 21

Com effeito, colloquemos um angulo sobre outro, de modo que os vertices coincidam e tambem os lados BC e EF; como por um ponto B de uma recta BC não se póde levantar mais de uma perpendicular a essa recta, os lados AB e DE coincidirão necessariamente, e, portanto, os angulos são eguaes.

Theorema

21. *Dois angulos adjacentes, cujos lados exteriores estão em linha recta,* **são supplementares** (fig. 22).

Hyp.: Sejam os angulos adjacentes ABC e CBD.

These: Os angulos ABC e CBD são supplementares.

Demonstração: Levantemos no vertice B a perpendicular BE sobre AD; teremos evidentemente:

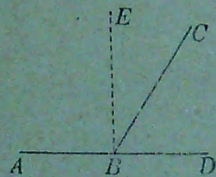



Fig. 22

$$ABE + EBD = 2 \text{ rectos } (17)$$
$$ABC = ABE + EBC$$
$$CBD = EBD - EBC.$$

Sommando as duas ultimas egualdades, vem:

$$ABC + CBD = ABE + EBD = 2 \text{ rectos.}$$

22. Corollario 1.º — *Os quatro angulos formados por uma recta perpendicular a outra, suppondo-se ambas prolongadas além do vertice,* **são todos rectos** (fig. 23); pois, sendo CO perpendicular a AE, são rectos os angulos AOC e COE; logo, os seus adjacentes respectivos AOD e DOE tambem o são. Conclue-se dahi que, si uma recta é perpendicular a outra, esta é perpendicular á primeira.

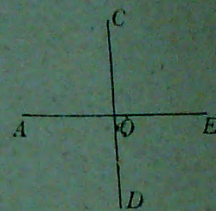



Fig. 23

23. Corollario 2.º — *A somma dos angulos consecutivos, formados em um ponto de uma recta e do mesmo lado dessa recta,* **vale dois rectos** (fig. 24); porque a somma dos angulos BCD, DCE, etc., etc., equivale á somma dos angulos adjacentes ACD e DCB, que é egual a dois rectos.

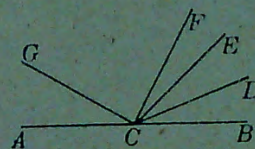



Fig. 24

24. Corollario 3.º — *A somma dos angulos consecutivos formados em torno de um ponto* **vale quatro rectos** (fig. 25); porque, prolongando uma recta AO além do ponto O, a somma dos angulos que ficam de cada lado da recta AM é egual a dois rectos; logo, a somma de todos esses angulos vale quatro rectos.

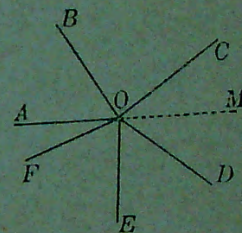



Fig. 25

25. Corollario 4.º — *As bissectrizes dos angulos adjacentes supplementares* **são perpendiculares entre si** (fig. 26); porque o angulo NCM, formado pelas bissectrizes CN e CM, é recto, como formado da semisomma dos angulos adjacentes supplementares ACD e DCB.

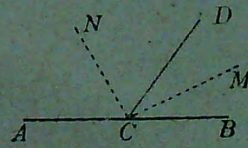



Fig. 26

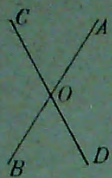



Fig. 27

26. Corollario 5.º — *Os angulos oppostos pelo vertice* **são eguaes** (fig. 27); porque facilmente se vê que têm o mesmo supplemento. Demais, são eguaes pela definição de angulo (**12**), pois os lados de um desses angulos têm a mesma inclinação que os lados do outro.

Theorema reciproco do 21 (*)

27. *Si dois angulos adjacentes são supplementares,* **os lados exteriores estão em linha recta** (fig. 28).

Com effeito, sejam os angulos adjacentes ACD e DCB. Chamando CB' o prolongamento de AC, o angulo DCB' será supplemento de ACD pelo theorema directo; mas, por hypothese, o angulo DCB é tambem supplemento de ACD; logo, o prolongamento CB' coincide com CB, e, portanto, os lados AC e CB estão em linha recta.

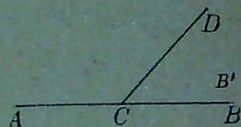



Fig. 28

(*) *Diversas especies de proposições empregadas em Geometria.*

O enunciado de um theorema se compõe essencialmente de uma *hypothese* e de uma *these;* hypothese é o que se suppõe verdadeiro na proposição, e these é o que se quer provar como consequencia da hypothese.

Duas proposições comparadas entre si podem ser *reciprocas, contrarias* e *contradictorias.*

Duas proposições são reciprocas, quando a hypothese e a these da primeira se tornam respectivamente a these e a hypothese da segunda, como se observa nos ultimos theoremas (**21**) e (**27**).

Duas proposições são contrarias, quando as condições da segunda são a negativa das condições da primeira. Por exemplo, o theorema contrario do theorema **21** será: *Os angulos adjacentes, cujos lados exteriores não estando em linha recta, não são supplementares.*

Duas proposições são contradictorias, quando têm a mesma hypothese com theses oppostas, ou hypotheses oppostas e a mesma these.

Theorema

28. *Por um ponto fóra de uma recta* **póde-se traçar uma perpendicular a essa recta e sómente uma** (fig. 29).

Hyp.: Seja o ponto C fóra da recta AB.

These: Pelo ponto C póde-se traçar uma perpendicular a AB e sómente uma.

Demonstração: Tracemos pelo ponto C uma recta CD a um ponto qualquer D da recta AB; pelo ponto D tracemos a recta DX que forme com AB um angulo BDX egual a CDB; tomemos na recta DX um comprimento $DC' = DC$, e unamos os pontos C e C' por uma recta CC'. Dobrando a figura pela recta AB, DC coincidirá com DX, porque formam angulos eguaes com AB por construcção; o ponto C coincidirá com C' por serem eguaes, tambem por construcção, os segmentos de recta DC e DC'; portanto, as rectas EC e EC', que têm as mesmas extremidades, coincidirão; logo, os angulos adjacentes DEC e DEC' são supplementares e eguaes, o que prova ser AE perpendicular a CC' ou CE perpendicular a AB. Como dois pontos C e C' determinam a posição de uma recta CC', a linha CDC' não será recta, e os angulos adjacentes eguaes CDE e EDC' não podem ser supplementares; logo, CD será obliqua a AB.

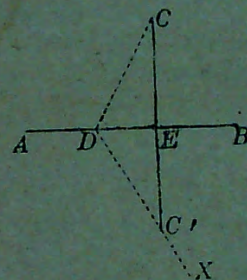



Fig. 29

Q. E. D.

Theorema

29. *Si de um ponto fóra de uma recta se traçar a perpendicular e differentes obliquas:*

1.º, *as obliquas cujos pés equidistam da perpendicular* **são eguaes;** 2.º, *a perpendicular* **é a menor;** 3.º, *a obliqua que mais se afasta da perpendicular* **é a maior** (fig. 30).

Hyp.: Seja CD perpendicular a AB e $DE = DF$,

THESE: 1.º $CE = CF$; 2.º $CD < CF$; 3.º CF ou $CE < CG$.

DEMONSTRAÇÃO: 1.º Dobrando a figura pela recta CD, DB tomará a direcção DA, por serem eguaes os angulos em D; o ponto E cahirá sobre F, por ser $DE = DF$, e as rectas CE e CF, que têm os mesmos extremos, coincidirão; logo, $CE = CF$.

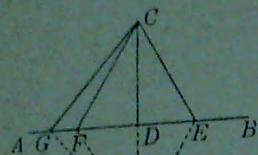



Fig. 30

2.º e 3.º Prolongue-se CD de um comprimento DC' egual á distancia CD, tracem-se as rectas $C'E$, $C'F$ e $C'G$, e ter-se-á evidentemente:

$$CDC' < CFC' < CGC' \quad (1).$$

Mas $CD = C'D$ por construcção; $CF = C'F$, como obliquas cujos pés equidistam da perpendicular, e bem assim $CG = C'G$; logo, $CDC' = 2CD$; $CFC' = 2CF$ e $CGC' = 2CG$.

Substituindo estes valores nas deseguáldades (1), tem-se:

$2CD < 2CF < 2CG$, ou simplesmente $CD < CF < CG$.

30. COROLLARIO. — *De um ponto tomado fóra de uma recta* **não se podem traçar mais que duas obliquas eguaes a essa recta**, e serão situadas de um lado e de outro da perpendicular a essa mesma recta.

31. RECIPROCO DO **29**. — 1.º *As obliquas eguaes* **equidistam do pé da perpendicular;** 2.º *A maior de duas obliquas* **é a que se afasta mais do pé da perpendicular;** 3.º *A menor distancia de um ponto a uma recta* **é a perpendicular traçada do ponto a essa recta** (fig. 30).

1. Com effeito, sendo eguaes as obliquas CE e CF, as distancias DE e DF tambem o são, porque, si fossem deseguaes essas distancias DE e DF, seriam tambem deseguaes, segundo o theorema directo, as obliquas CE e CF, o que é contra a hypothese; logo $DE = DF$.

2.º Sendo $CG > CE$, será tambem $DG > DE$, porque, si DG fosse egual ou menor que DE, a obliqua CG seria egual ou menor que CE, o que é contra a hypothese.

3.º Seja CD a menor distancia do ponto C á recta AB. A recta CD será perpendicular sobre AB; porque, si não o fosse, se poderia traçar a perpendicular, que então seria a menor distancia, o que vae contra a hypothese.

Chama-se *distancia* de um ponto a uma recta a perpendicular tirada do ponto á recta.

32. Observação. — Reflectindo sobre o theorema directo(**29**), nota-se que se comparam duas obliquas pela distancia que as separa do pé da perpendicular, e nessa comparação podem-se formular sómente as tres hypotheses estabelecidas: que a primeira obliqua diste menos, diste egualmente, ou diste mais que a segunda obliqua, correspondendo a cada uma dessas hypotheses uma conclusão differente, isto é, que a primeira obliqua será menor, egual ou maior que a segunda. Como estas conclusões se excluem mutuamente, as reciprocas são necessariamente certas; assim, si uma obliqua é menor, egual ou maior que outra, o pé da perpendicular distará menos, egualmente ou mais da primeira obliqua que da segunda, pois, a não ser assim, resultaria sempre um absurdo.

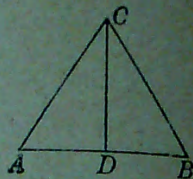
Estas considerações nos levam a estabelecer a seguinte regra, conhecida por *principio de reciprocidade: Quando numa questão se fizer uma serie de theoremas, cujas hypotheses abrangem todos os casos possiveis e cujas conclusões correspondentes são incompativeis entre si, todas as reciprocas serão verdadeiras.*

Em consequencia, podemos prescindir da demonstração dos reciprocos que se encontram neste caso, ou limitar-nos a fazer a demonstração *indirecta* dos mesmos, isto é, em vez de mostrar como a conclusão se deduz da hypothese, fazemos ver que, si esta conclusão não fosse verdadeira, seriamos levados a consequencias contrarias á hypothese ou absurdas.

THEOREMA

33. *Todo ponto que está na perpendicular levantada do ponto medio de uma recta,* **é equidistante dos pontos extremos dessa recta** (fig. 31).

Fig. 31

Com effeito, $CA = CB$, porque são obliquas equidistantes do pé da perpendicular CD sobre AB (29).

34. Reciproco. — *Todo ponto equidistante dos extremos de uma recta* **está na perpendicular levantada do ponto medio dessa recta** (fig. 31).

As rectas CA e CB, sendo eguaes por hypothese, são obliquas equidistantes da perpendicular baixada do ponto C á recta AB (31); logo, o ponto C está na perpendicular levantada ao meio de AB.

35. Corollario. — *Si dois pontos de uma recta equidistam dos extremos de outra recta,* **a primeira é perpendicular á segunda em seu ponto medio** (fig. 32).

Sejam os pontos C e D equidistantes dos extremos A e E da recta AE. Si pelo ponto medio de AE se traçar uma perpendicular a esta recta, a perpendicular passará pelos pontos C e D, situados a egual distancia dos pontos A e E; logo, a perpendicular e a recta CD coincidem, por terem dois pontos communs, e CD é, portanto, perpendicular ao meio de AE.

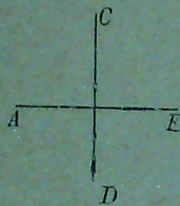



Fig. 32

THEOREMA

36. *Todo ponto situado na bissectriz de um angulo* **equidista dos lados do angulo**; *e todo ponto situado fóra da bissectriz* **não equidista dos lados do angulo** (fig. 33).

1.º Seja D um ponto da bissectriz do angulo ABC; DE e DF as distancias do ponto D aos lados do angulo. Dobrando-se a figura pela bissectriz, o lado BC coincidirá com BA, por serem eguaes os angulos em B, formados pela bissectriz, e DE coincidirá tambem com DF, porque, do contrario, passariam pelo ponto D duas perpendiculares á mesma recta (28); logo, $DE = DF$.

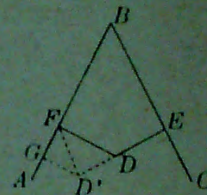



Fig. 33

2.º Seja D' um ponto situado fóra da bissectriz, $D'E$ e $D'G$ as distancias do ponto D' aos lados do angulo, e D o ponto de intersecção de $D'E$ com a bissectriz.

Temos, evidentemente:

$$DE = DF \text{ e } D'F < D'D + DF.$$

Substituindo na desegualdade DF por DE, vem:

$$D'F < D'D + DE \text{ ou } D'F < D'E,$$

e com maior razão, $D'G < D'E$.

37. **Logares geometricos** (*). — *Chama-se logar geometrico a figura formada por todos os pontos que têm uma propriedade commum, com exclusão de todos os outros.*

Para determinar um logar geometrico, é preciso conhecer primeiramente a *natureza* do logar dos pontos que têm uma propriedade commum, e a *posição* desse logar em relação ás grandezas conhecidas; depois se provará que todo ponto da figura gosa da propriedade indicada, e que todo ponto que gosa da propriedade pertence á figura, como se fez nos theoremas **33** e **34**; ou então que todo ponto da figura gosa da propriedade referida, e todo ponto que não faz parte da figura não possue essa propriedade, como se demonstrou no theorema **36.** Isto é, será preciso demonstrar

(*) A doutrina dos logares geometricos é attribuida a Platão (—IV sec.), celebre philosopho da antiguidade.

o theorema directo e o reciproco ou o theorema directo e o contrario. Assim, os theoremas **33** e **34** por um lado, e o **36** por outro, podem enunciar-se como segue:

1.º O logar geometrico dos pontos equidistantes das extremidades de uma recta, é a perpendicular levantada pelo ponto medio dessa recta.

2.º O logar geometrico dos pontos equidistantes dos lados de um angulo, é a bissectriz desse angulo.

Os logares geometricos constituem um dos processos particulares para tratar as questões relativas as construcções geometricas, e representam um papel importante na resolução dos problemas graphicos.

Reduzem-se geralmente os problemas graphicos ás construcções elementares da linha recta, determinada por dois pontos, e do circulo, determinado pelo seu centro e o raio. Traçam-se estas duas figuras por meio de dois instrumentos, a *regua* para a recta, e o *compasso* para o circulo.

38. Problema. — *Tirar a perpendicular a uma recta por um ponto dado na recta* (fig. 34).

1.º Si o ponto dado fôr o ponto medio C da recta AB, descrevem-se dos pontos A e B como centros e com um mesmo raio, maior que AC, dois arcos que se cortam em D, e DC será a perpendicular pedida, pois cada um dos pontos D e C equidista dos pontos A e B.

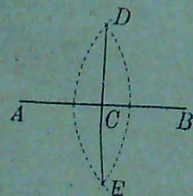



Fig. 34

2.º Quando o ponto medio C não fôr conhecido, os mesmos arcos darão por sua segunda intersecção um outro ponto E que, unido com D, dará a perpendicular ao meio C da recta AB.

3.º Si o ponto dado é um ponto qualquer da recta, tomam-se nessa recta, a um e outro lado do ponto dado, duas distancias eguaes, e fica o problema reduzido ao caso anterior.

39. Problema. — *Traçar a perpendicular a uma recta por um ponto dado fóra della* (fig. 35).

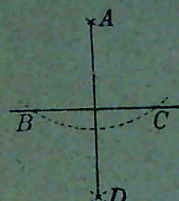



Fig. 35

Do ponto dado A descreve-se um arco que corte a recta nos pontos B e C, os quaes equidistarão do ponto A; e, determinando outro ponto D, tambem equidistante dos pontos B e C, a recta AD será a perpendicular procurada.

40. Problema. — *Por um ponto de uma recta tirar outra recta que forme com a primeira um angulo dado* (fig. 36).

Seja BAC o angulo dado, e A' o ponto dado na recta $A'C'$. Fazendo centro no vertice A com um raio arbitrario, traça-se o arco ab, e com o mesmo raio, fazendo centro em A', traça-se outro arco, no qual se toma a distancia $a'b' = ab$, e traçando $A'B'$, o angulo $B'A'C'$ será egual ao dado BAC (*).

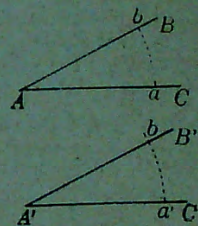



Fig. 36

41. Problema. — *Dividir um angulo em duas partes eguaes* (fig. 37).

Seja BAE o angulo dado. Do vertice A como centro, com um raio arbitrario, descreve-se um arco bc; depois, dos pontos b e c como centros, com o mesmo raio, descrevem-se dois arcos de circulo que se cortam em D; unem-se os pontos A e D, e AD é a bissectriz do angulo; porque, dobrando a figura pela recta AD, o lado AB coincidirá com o lado AE, por ser AD perpendicular ao meio da corda bc.

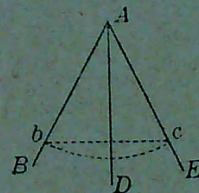



Fig. 37

(*) Admittimos como certo que os angulos são eguaes, quando os arcos comprehendidos entre seus lados e descriptos com um mesmo raio do vertice como centro são tambem eguaes, e que esses arcos são eguaes sendo as cordas eguaes.

42. Problema. — *Dados dois pontos do mesmo lado de uma recta, determinar o caminho mais curto de um ponto ao outro, tocando na recta* (fig. 38).

Sejam os pontos A e B, situados do mesmo lado da recta CD. Determinemos o ponto A' symetrico de A em relação á recta CD; trace-se a recta BA', que corta CD no ponto F, e AFB será o caminho mais curto procurado.

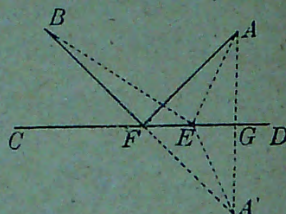



Fig. 38

Com effeito, é sufficiente provar que qualquer outro caminho, tal como AEB, é maior que AFB. Tirando AE', temos: $AE = A'E$, como obliquas equidistantes do pé da perpendicular; $AF = A'F$, pela mesma razão; portanto:

$$AEB = A'EB \text{ e } AFB = A'FB; \text{ mas } A'EB > A'FB;$$

$$\text{logo, } AEB > AFB.$$

Nota. Os angulos AFD e BFC são evidentemente eguaes, pois ambos são eguaes a $A'FD$; por conseguinte, *o caminho mais curto de um ponto a outro, tocando uma recta dada, compõe-se de duas rectas que formam angulos eguaes com a recta dada.*

Exercicios

Theoremas a demonstrar:

1. Si sobre uma recta se fixa um segmento de comprimento determinado, a distancia de um ponto qualquer da recta ao ponto medio do segmento é egual, em grandeza e signal, á semi-somma das distancias do referido ponto aos extremos do mesmo segmento.

2. Si no plano de um angulo e pelo vertice do mesmo se tira uma recta qualquer, o angulo formado por ella com a bissectriz do angulo dado é egual, em grandeza e signal, á semi-somma dos angulos que a mesma recta fórma com os lados do angulo proposto.

3. Toda perpendicular á bissectriz de um angulo determina, nos lados deste, dois pontos equidistantes do vertice.

Problemas a resolver:

1. Determinar sobre uma recta um ponto que equidiste de outros dois dados fóra da recta.

2. Determinar um ponto que equidiste de outros dois, e que fique tambem a egual distancia de duas rectas dadas.

3. Dados dois pontos situados de um lado e de outro de uma recta, determinar sobre essa recta um terceiro ponto tal, que a differença das distancias aos outros dois pontos dados seja a maior possivel.

4. Dada uma recta limitada, determinar varios pontos no seu prolongamento, usando sómente o compasso.

5. Dada uma circumferencia, uma recta e nella um ponto, determinar sobre a recta outro ponto que equidiste do primeiro e da circumferencia.

6. Qual é o valor do angulo formado pelas bissectrizes: 1.º, de dois angulos adjacentes supplementares? 2.º, de dois angulos adjacentes complementares?

III. — Parallelas

43. Linhas parallelas. — *Diz-se que duas rectas são parallelas, quando estão situadas no mesmo plano e não se encontram, por mais que se prolonguem.*

A existencia de rectas parallelas demonstra-se pela proposição seguinte:

Theorema

44. *Duas rectas perpendiculares a uma terceira* **são parallelas** (fig. 39).

Pois, si as rectas CD e EF, sendo perpendiculares a AB, se encontrassem, passariam pelo ponto de encontro duas perpendiculares a uma mesma recta AB, o que é absurdo (28).

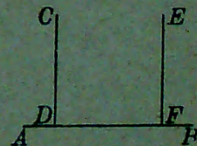



Fig. 39

45. Postulado de Euclides (*). — *Por um ponto tomado fóra de uma recta* **não póde passar mais que uma parallela a essa recta** (**).

46. Corollario 1.º — *Duas rectas, uma perpendicular e outra obliqua a uma mesma recta,* **necessariamente se encontram** (fig. 40).

Com effeito, si as rectas CD e EF, respectivamente perpendicular e obliqua a AB, não se encontrassem, levantando a perpendicular FG sobre AB, teriamos pelo ponto F duas parallelas FG e FE á mesma recta CD, o que é impossivel (45).

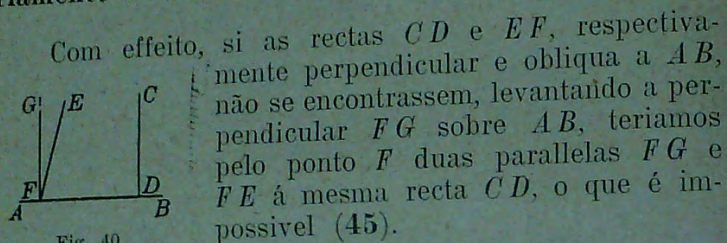



Fig. 40

47. Corollario 2.º — *Si duas rectas são parallelas, toda recta que corta uma dellas,* **corta tambem a outra** (fig. 40).

Sejam as duas parallelas CD e GF. Si a recta EF, que corta GF no ponto F, não cortasse tambem CD, pelo ponto F passariam duas parallelas a CD, o que é impossivel.

48. Corollario 3.º — *Si duas rectas são parallelas, toda recta perpendicular a uma dellas* **é tambem perpendicular á outra** (fig. 40). Si a recta AB, sendo perpendicular a CD, não fosse tambem perpendicular á sua parallela GF, as duas rectas CD e GF, uma perpendicular e outra obliqua á mesma recta, se encontrariam (46), o que é contra a hypothese.

(*) Euclides (— III sec.), celebre geometra da antiguidade, que erigiu em corpo de doutrina as verdades geometricas.

(**) Este enunciado, que lembra o postulado de Gergonne, é equivalente ao proposto por Euclides. A theoria das parallelas está fundada neste principio, até hoje sem demonstração rigorosa, não obstante os esforços dos maiores geometras.

49. Corollario 4.º — *Duas rectas parallelas a uma terceira recta* **são parallelas entre si** (fig. 41).

Pois, si AB e CD se encontrassem, pelo ponto de encontro passariam duas parallelas a EF (45).

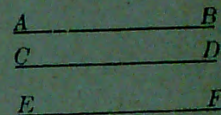
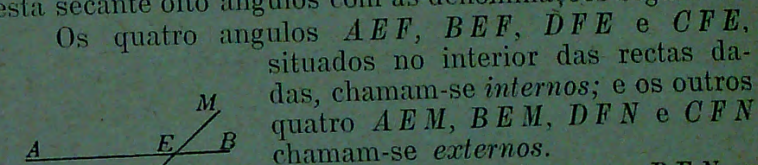



Fig. 41

50. Linha secante. — Si duas rectas quaesquer AB e CD (fig. 42) são cortadas por uma terceira MN, chamada então *secante*, formam com esta secante oito angulos com as denominações seguintes:

Os quatro angulos AEF, BEF, DFE e CFE, situados no interior das rectas dadas, chamam-se *internos;* e os outros quatro AEM, BEM, DFN e CFN chamam-se *externos.*

Os angulos internos BEN e CFM, situados de um lado e de outro da secante, e não adjacentes, chamam-se *alternos internos.* São tambem alternos internos os angulos AEN e DFM.

Fig. 42

Analogamente, denominam-se *alternos externos* os angulos AEM e DFN, e bem assim BEM e CFN.

Os angulos BEM e DFM, um externo e outro interno, do mesmo lado da secante e não adjacentes, chamam-se *correspondentes.* Portanto, são tambem correspondentes os angulos BEN e DFN, os angulos AEM e CFM, e os angulos AEN e CFN.

Os angulos AEN e CFM ou BEN e DFM chamam-se *internos do mesmo lado da secante;* e os angulos AEM e CFN ou BEM e DFN, chamam-se *externos do mesmo lado da secante.*

Theorema

51. Duas rectas são parallelas:

1.º *Si os angulos alternos são eguaes;*
2.º *Si os angulos correspondentes são eguaes;*

3.º *Si os angulos internos ou externos do mesmo lado da secante são supplementares* (fig. 43).

1.º Sejam eguaes os angulos alternos AEN e DFM. Pelo ponto medio I de EF traça-se GH perpendicular a CD; si se provar que GH é tambem perpendicular a AB, o theorema estará demonstrado (44). Ora, faça-se girar a figura FIH em torno do ponto I, da direita para esquerda, até que IF se superponha a IE. Neste caso, o ponto F coincidirá com E, por ser $IF=IE$; assim tambem IH coincidirá com IG, por serem eguaes os angulos em I, como oppostos pelo vertice; e, finalmente, FH coincidirá com EG, por serem eguaes por hypothese os angulos AEN e DFM; logo, o ponto H cahirá sobre G, e os angulos em G e H cujos lados coincidem, são eguaes e rectos; portanto, a recta GH é perpendicular a AB e as rectas AB e CD são parallelas (44).

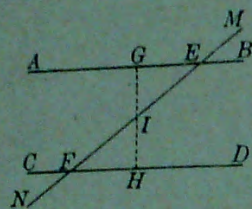
Fig. 43

2.º Si os angulos correspondentes BEM e DFM são eguaes, como o angulo BEM é egual a AEN, conclue-se que os angulos alternos DFM e AEN são eguaes; logo, as rectas AB e CD são parallelas.

3.º Si os angulos internos DFM e BEN do mesmo lado da secante são supplementares, como os angulos AEN e BEN tambem o são, os angulos alternos AEN e DFM são eguaes, por terem o mesmo supplemento; logo, as rectas AB e CD são parallelas.

Theorema reciproco

52. *Si duas rectas parallelas são cortadas por uma secante:*

1.º Os angulos alternos são eguaes.
2.º Os angulos correspondentes são eguaes.
3.º Os angulos internos ou externos do mesmo lado da secante são supplementares (fig. 44).

1.º Sejam as rectas AB e CD parallelas. Si os angulos alternos AEN e DFM não fossem eguaes, poder-se-ia traçar uma recta $A'B'$, que formasse com CD angulos alternos eguaes; mas, neste caso, a recta $A'B'$ seria, pelo theorema directo, parallela a CD, e teriamos então pelo mesmo ponto E duas parallelas CD, o que é absurdo (45).

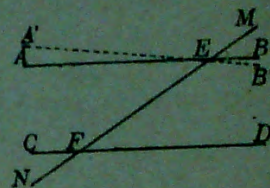



Fig. 44

2.º Acabamos de provar que os angulos alternos AEN e DFM são eguaes; mas, como os angulos AEN e BEM são eguaes, conclue-se que os angulos correspondentes DFM e BEM são tambem eguaes.

3.º Os angulos AEN e BEN são supplementares, e, sendo eguaes os angulos AEN e DFM, como alternos entre parallelas, os angulos internos do mesmo lado da secante DFM e BEN são tambem supplementares.

Theorema

53. *As partes de parallelas comprehendidas entre parallelas* **são eguaes** (fig. 45).

Sejam as parallelas AB e CD comprehendidas entre as parallelas AC e BD. Traçando a secante AD, teremos os angulos $BAD=CDA$ e $CAD=BDA$, como alternos entre parallelas. Seja I o ponto medio de AD; si fizermos girar a figura ACD em torno de I, até que o ponto A venha a D, e o ponto D á posição que occupava A, vemos que AC tomará a direcção DB, e AB a direcção DC, em virtude da egualdade dos angulos alternos acima mencionados; logo, os pontos B e C coincidirão, e teremos:

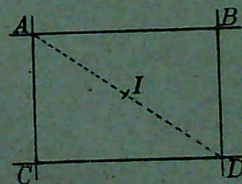



Fig. 45

$$AB=CD \text{ e } AC=BD.$$

54. Corollario. — Si as rectas AC e BD fossem perpendiculares a CD, sel-o-iam tambem á sua parallela AB; e essas perpendiculares, que podem ser em qualquer ponto de CD, mediriam a distancia dos pontos A e B á recta CD; conclue-se, pois, que *duas rectas parallelas* **equidistam em toda sua extensão.**

Theorema

55. *Dois angulos, cujos lados são parallelos,* **são eguaes** quando seus lados são dirigidos no mesmo sentido ou em sentido contrario; e **são supplementares** quando têm dois lados dirigidos no mesmo sentido e os outros dois em sentido contrario (fig. 46).

1.º Sejam os angulos ABC e DEF, cujos lados, são parallelos e no mesmo sentido. Prolongando DE até encontrar em H o lado BC, teremos o angulo $ABC = DHC$, como correspondentes entre parallelas, e $DHC = DEF$ pela mesma razão; logo, $ABC = DEF$.

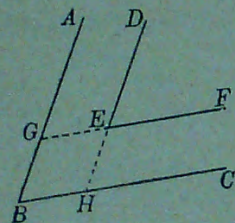



Fig. 46

2.º Sejam agora os angulos ABC e GEH, cujos lados são parallelos, mas dirigidos em sentido opposto.

Prolongando os lados do angulo GEH em sentido contrario, além do vertice, formamos o angulo DEF, egual a ABC como acabámos de ver, e tambem egual ao angulo GEH, como oppostos pelo vertice; logo, $ABC = GEH$.

3.º Consideremos, finalmente, os angulos ABC e DEG, que têm dois de seus lados AB e DE parallelos no mesmo sentido, e os outros dois BC e EG em sentido contrario.

Prolongando GE, fórma-se o angulo DEF, supplementar de DEG e egual ao angulo ABC; logo, ABC e DEG são supplementares.

Theorema

56. *Dois angulos, cujos lados são perpendiculares,* **são eguaes ou supplementares** (fig. 47).

Hyp.: Os angulos ABC e DEF têm os lados perpendiculares.

These: Os angulos ABC e DEF são eguaes ou supplementares.

Demonstração: Levantemos pelo ponto B a perpendicular BH ao lado BC, e BG perpendicular ao outro lado BA; formaremos assim um angulo GBH cujos lados são respectivamente parallelos aos lados do angulo DEF; logo, os angulos GBH e DEF são eguaes ou supplementares (55). Mas os angulos GBH e ABC são eguaes, por terem o mesmo complemento HBA; por conseguinte, os angulos ABC e DEF são eguaes ou supplementares. Q. E. D.

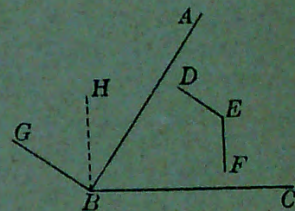



Fig. 47

Theorema

57. *Si duas rectas se cortam,* **as suas perpendiculares respectivas tambem são concorrentes** (fig. 48).

Com effeito, si as rectas DE e FG, respectivamente perpendiculares a BC e AB, não se encontrassem, seriam parallelas; mas, neste caso, seriam tambem parallelas as rectas AB e BC (**44** e **48**), o que vae contra a hypothese.

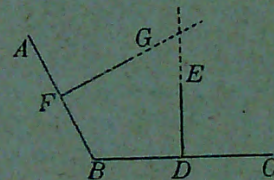



Fig. 48

58. Observações. — 1.ª As proposições contrarias dos theoremas **51** e **52** são evidentemente verdadeiras, o que dispensa a demonstração directa.

2.ª As reciprocas dos theoremas **55** e **56** não são verdadeiras; pois dois angulos podem ser eguaes numa posição qualquer, sem que seus lados sejam parallelos ou perpendiculares.

59. Deslocamento em seu plano de uma figura plana de fórma invariavel. — Uma figura de fórma invariavel póde ser deslocada em seu plano pelo movimento de *translação* ou pelo de *rotação*.

A translação é um movimento no qual todos os pontos da figura descrevem rectas parallelas entre si, do mesmo sentido e do mesmo comprimento.

Demonstram-se, sobre a translação, as seguintes proposições:

1.ª *O movimento de translação não deforma as figuras.*

2.ª *Na translação toda recta da figura se move parallelamente a si mesma.*

3.ª *O movimento de uma figura resultante de varias translações é uma translação, chamada resultante das outras componentes.*

O corollario do n.º **19** emprega este movimento á figura formada pelo angulo recto ABC.

A rotação é um movimento no qual todos os pontos da figura giram em torno de um mesmo ponto fixo, chamado centro de rotação, e descrevem arcos de circulo do mesmo sentido e da mesma medida.

Demonstram-se, sobre a rotação, as seguintes proposições:

1.ª *O movimento de rotação não deforma as figuras.*

2.ª *Na rotação todas as rectas da figura se deslocam de um mesmo angulo.*

Em seguida estabelece-se o seguinte theorema de ordem geral: *Todo deslocamento, em seu plano, de uma figura plana de fórma invariavel, póde ser produzido por uma translação ou por uma rotação.*

Os theoremas **51** e **53** applicam o movimento de rotação plana em torno do ponto I, o primeiro em relação á figura FIH e o segundo a ACD.

60. Observação. — Na demonstração dos theoremas **28**, **29** e **36** empregámos um movimento que consiste em dobrar a figura por uma recta. Esse movimento é tambem chamado de *rotação em torno de um eixo*, mas tem o inconveniente de sahir de um mesmo plano, em se tratando de geometria plana; e, si o empregámos, foi com o intuito de seguirmos a maneira classica de apresentação das primeiras questões de geometria plana.

61. Problema. — *Por um ponto dado fóra de uma recta tirar uma parallela a essa recta* (fig. 49).

Sejam o ponto A e a recta BC. Do ponto A trace-se uma secante qualquer AB; depois, com o raio AB, descreva-se o arco BD de centro A, e o arco AC de centro B; tome-se $BD = AC$, e AD será a parallela pedida.

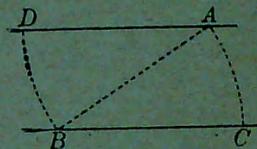



Fig. 49

Com effeito, as rectas AD e BC são parallelas, porque formam angulos alternos internos eguaes com a secante AB.

62. Problema. — *Por um ponto fóra de uma recta traçar outra recta que forme com a primeira um angulo egual a outro angulo dado* (fig. 50).

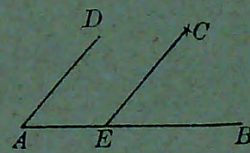



Fig. 50

Sejam o ponto C e a recta AB. Por um ponto qualquer A da recta AB tire-se AD, que forme com AB um angulo egual ao angulo dado, e pelo ponto C uma parallela CE a AD, e CE será a recta procurada.

Vê-se, com effeito, que os angulos CEB e DAB são eguaes, como correspondentes entre parallelas; mas DAB é egual ao angulo dado; por conseguinte, CEB tambem o é.

63. Problema. — *Dadas duas rectas, cujo ponto de intersecção é inaccessivel, traçar a bissectriz do angulo que ellas formam* (fig. 51).

Sejam AB e CD as duas rectas dadas, cujo ponto de intersecção é inaccessivel.

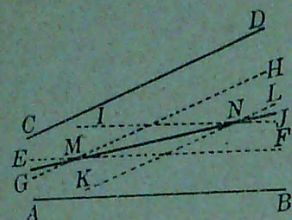



Fig. 51

Duas rectas EF e GH tiradas parallelamente a essas rectas dadas, a distancias eguaes dessas mesmas rectas, dão um ponto M equidistante de AB e CD; um segundo ponto N, obtido da mesma maneira, determina a bissectriz MN procurada. Com effeito, esta recta é equidistante das duas rectas dadas; logo (36), é bissectriz do angulo que ellas formam.

Exercicios

THEOREMAS A DEMONSTRAR:

1. Si os dois angulos têm seus lados parallelos, suas bissectrizes são parallelas ou perpendiculares; e si os angulos têm os lados perpendiculares, suas bissectrizes são perpendiculares ou parallelas.
2. Si pelas extremidades de uma recta e pelo seu ponto medio se traçam parallelas que terminem em outra recta, a que é traçada pelo ponto medio é a semi-somma das outras duas parallelas.

PROBLEMAS A RESOLVER:

1. Dadas duas rectas, determinar um ponto que diste de uma dellas um comprimento dado, e da segunda um comprimento tambem determinado.
2. Traçar uma recta parallela a uma recta dada, e que esteja a egual distancia de dois pontos conhecidos.
3. Sobre um rio, de margens rectilineas e parallelas, construir uma ponte normal ás margens, e cujas entradas equidistem de dois pontos situados de um e outro lado do rio, de modo que a communicação entre os dois pontos seja a mais curta possivel.
4. Dados um lado e a bissectriz de um angulo, cujo vertice é desconhecido, determinar o outro lado.
5. Dados dois pontos sobre um lado de um angulo, achar outro ponto na bissectriz que, unido com aquelles, origine duas secantes eguaes.

EXERCICIOS NUMERICOS:

1. Uma secante, encontrando duas parallelas, fórma com ellas dois angulos alternos internos de 30°. Calcular o valor dos outros angulos formados pelas parallelas e a secante.
2. Um angulo tem por valor 65°20′; quanto vale outro angulo cujos lados são parallelos e cuja abertura está dirigida: *a*) em sentido opposto; *b*) no mesmo sentido.

CAPITULO SEGUNDO

Polygonos

64. Definições. — *Chama-se polygono toda superficie plana limitada por linhas rectas que se cortam duas a duas.*

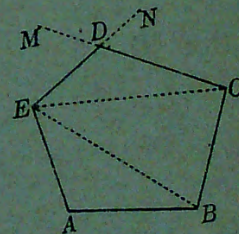
As rectas recebem o nome de *lados* do polygono, e o conjuncto desses lados denomina-se *contorno* ou *perimetro* do polygono.

Os pontos de encontro dos lados e os angulos internos, que formam dois lados consecutivos, são os *vertices* e os *angulos* do polygono. Ao angulo formado em cada vertice por um lado e o prolongamento do outro, chama-se *angulo externo* do polygono.

Chamam-se *angulos adjacentes* a um qualquer dos lados de um polygono, os dois angulos que têm esse lado commum; e este, por sua vez, é *adjacente* aos dois angulos.

Chama-se *diagonal* a recta que une dois vertices não consecutivos de um polygono.

Fig. 52

$ABCDE$ (fig. 52) é um polygono; AB, BC, CD, etc. são os lados; A, B, C, D e E são os vertices; EB e EC duas diagonaes; EDM ou seu opposto pelo vertice CDN, dois angulos exteriores; e EDC, um angulo interior; o lado AB é adjacente aos angulos EAB e ABC.

65. Classificação. — Sendo o perimetro de um polygono uma linha quebrada fecha-

da, gosa das propriedades desta (**10**), e o polygono, por consequencia, é *convexo* ou *concavo*, segundo o seu perimetro é tambem convexo ou concavo. Assim o polygono da fig. 52 é convexo, e o da fig. 53 é concavo. Este tem um angulo em C, maior que dois rectos, que é chamado *angulo reintrante*.

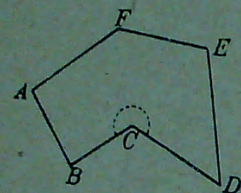



Fig. 53

Um polygono chama-se *equilatero*, quando tem todos os seus lados *eguaes*, *equiangulo*, quando seus angulos são todos eguaes; e *regular*, si reune as duas condições. Em caso contrario, denomina-se *irregular*.

Abrangendo um angulo uma extensão indefinida, faz-se necessario que uma terceira recta corte seus lados para se ter uma superficie plana limitada, e neste caso ter-se-á o polygono de menor numero possivel de lados, ou o *triangulo*, que é necessariamente convexo e não tem diagonaes, pois, todos os vertices são consecutivos.

Os polygonos, segundo o numero de lados, recebem as seguintes denominações:

Triangulo,	quando	tem	tres	lados
Quadrilatero,	»	»	quatro	»
Pentagono,	»	»	cinco	»
Hexagono,	»	»	seis	»
Heptagono,	»	»	sete	»
Octogono,	»	»	oito	»
Enneagono,	»	»	nove	»
Decagono,	»	»	dez	»
Undecagono,	»	»	onze	»
Dodecagono,	»	»	doze	»
Pentadecagono,	»	»	quinze	»
Icosogono,	»	»	vinte	»

Póde-se evitar esta nomenclatura, exceptuando os triangulos e os quadrilateros, dizendo-se um polygono de cinco, de seis, de sete, etc. lados.

I. — Triangulos

66. Definições. — *Triangulo é um polygono de tres lados*, e consta de seis elementos: tres angulos e tres lados. Os angulos designam-se commummente com as letras A, B, C, collocadas nos vertices, e os lados oppostos a esses angulos com as mesmas letras minusculas a, b, c; assim, o angulo A e o lado a serão oppostos (fig. 54). Ordinariamente, porém, dispensamo-nos de escrever essas letras minusculas representativas dos lados, dizendo lado BC, por exemplo, em vez de lado a.

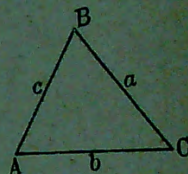



Fig. 54

THEOREMA

67. *Em todo triangulo, um lado qualquer* **é menor que a somma dos outros dois e maior que a sua differença** (fig. 54).

Com effeito, suppondo AC o maior dos tres lados, e AB o menor, temos evidentemente:

1.º $AC < AB + BC$ (**3**)

2.º $AB + BC > AC$ ou $AB > AC - BC$

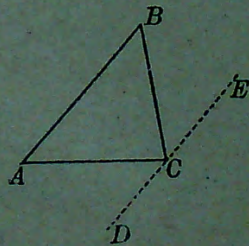
Por conseguinte, para se poder construir um triangulo com tres rectas dadas, é preciso que satisfaçam ás condições indicadas, que se resumem nesta: ser a maior das tres rectas dadas menor que a somma das outras duas.

THEOREMA

68. *A somma dos tres angulos de um triangulo* **é egual a dois angulos rectos** (fig. 55).

Fig. 55

Com effeito, tracemos pelo vertice C do triangulo ABC uma parallela DE ao lado opposto AB. Teremos $DCA + ACB + BCE = 2$ angulos rectos.

Mas o angulo $DCA = BAC$ por

serem alternos entre parallelas, e o angulo $BCE=CBA$ pela mesma razão, donde $BAC+ACB+CBA=2$ rectos, ou simplesmente $A+B+C=2$ rectos.

69. COROLLARIO 1.º — *Qualquer angulo exterior de um triangulo* **é egual á somma dos dois angulos interiores não adjacentes** (fig. 56).

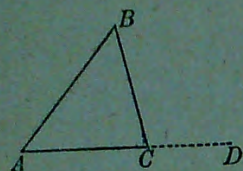



Fig. 56

Com effeito, o angulo exterior BCD tem para supplemento o angulo C do triangulo; e, pelo theorema anterior, a somma dos angulos $A+B$ tem tambem o mesmo angulo C para supplemento; logo, o angulo exterior $BCD=A+B$.

70. CORÓLLARIO 2.º — *Um angulo qualquer de um triangulo* **é o supplemento da somma dos outros dois.**

E' uma consequencia immediata do theorema.

71. CORÓLLARIO 3.º — *Si dois angulos de um triangulo são respectivamente eguaes a dois angulos de outro triangulo,* **o terceiro angulo de um é tambem egual ao terceiro angulo do outro;** porque estes terceiros angulos são supplementos de sommas eguaes.

72. CORÓLLARIO 4.º — *Dois triangulos, cujos lados são respectivamente parallelos ou perpendiculares,* **têm os seus angulos respectivamente eguaes.**

Com effeito, os angulos são eguaes ou supplementares (**55** e **56**); sendo, pois, A e A', B e B', C e C' os pares de angulos, cujos lados são respectivamente parallelos ou perpendiculares, podem dar-se as seguintes combinações:

1.ª $A+A'=2$ rectos; $B+B'=2$ rectos; $C+C'=2$ rectos
2.ª $A+A'=2$ rectos; $B+B'=2$ rectos; $C=C'$
3.ª $A=A'$; $B=B'$, donde $C=C'$.

Destas tres combinações sómente a terceira é admissivel, porquanto qualquer das outras duas daria mais

de dois angulos rectos para a somma dos angulos de cada triangulo.

73. CORÓLLARIO 5.º — *Um triangulo* **não póde ter mais de um angulo recto, nem mais de um obtuso e nem um recto e outro obtuso;** porque, em qualquer destes casos, teriamos mais de dois angulos rectos para somma dos angulos do triangulo.

Por conseguinte, um triangulo só póde ter um angulo recto e dois agudos, ou um obtuso e dois agudos, ou ainda os tres angulos agudos.

74. Definições. — O triangulo chama-se *rectangulo*, quando tem um angulo recto; *obtusangulo*, quando tem um angulo obtuso; e *acutangulo*, quando os tres angulos são agudos. Os triangulos acutangulos e obtusangulos denominam-se em geral triangulos *obliquangulos*.

No triangulo rectangulo chama-se *hypotenusa* o lado opposto ao angulo recto, e *cathetos* os lados que formam o angulo recto.

Os angulos agudos de um triangulo rectangulo são complementares, porque a sua somma vale um angulo recto.

O triangulo chama-se tambem *equilatero*, quando seus tres lados são eguaes entre si; *isosceles*, quando dois dos seus lados são eguaes; e *escaleno*, quando os tres lados são deseguaes.

Base de um triangulo é o lado sobre o qual se suppõe que elle está assente. *Vertice* do triangulo é o vertice do angulo opposto á base. *Altura* do triangulo é a perpendicular baixada do vertice sobre a base ou sobre o seu prolongamento.

Num triangulo isosceles é o ponto de concurso dos lados eguaes que se chama, de preferencia, o vertice do triangulo, e o lado opposto que se chama a base.

Chama-se *mediana* de um triangulo a recta que une um vertice ao meio do lado opposto; *bissectriz interior*, a bissectriz de um dos angulos do triangulo; *bissectriz exterior*, a bissectriz de um dos angulos exteriores; e *mediatriz*, a perpendicular ao meio de um de seus lados.

THEOREMA

75. 1.º *Si um triangulo tem dois lados eguaes,* **os angulos oppostos são tambem eguaes.**

2.º *Si um triangulo tem dois lados deseguaes,* **ao maior lado se oppõe o maior angulo** (fig. 57).

1.ª Hyp.: Os lados CA e CB são eguaes.

These: Os angulos A e B são eguaes.

Demonstração: Tracemos CD perpendicular a AB e D será o ponto medio de AB (31). Dobrando agora a figura pela recta CD, temos que DB tomará a direcção DA, por serem eguaes os angulos em D; o ponto B coincidirá com A, por ser $DB = DA$, e os lados CB e CA tambem coincidirão, porque os seus extremos coincidem; logo, os angulos A e B são eguaes.

Fig. 57

2.ª Hyp.: O lado $FG > EG$.

These: O angulo GEF será maior que GFE.

Demonstração: Tomemos $GH = GE$ e tracemos EH. No triangulo isosceles EGH, os angulos GEH e GHE são eguaes e, portanto, o angulo $GEF > GHE$; mas o angulo GHE, externo ao triangulo EFH, sendo egual á somma dos angulos HFE e FEH (69), é maior que o angulo HFE. Tem-se, pois:

$$GEF > GHE > GFE,$$
$$\text{logo:} \quad GEF > GFE.$$

76. Reciproco. — E' necessariamente certo (32).

77. Corollario 1.º — *O triangulo equilatero* **é tambem equiangulo,** e por conseguinte **regular.**

78. Corollario 2.º — *A altura de um triangulo isosceles* **é tambem bissectriz e mediana;** pois que divide o angulo do vertice e a base em duas partes eguaes.

THEOREMA

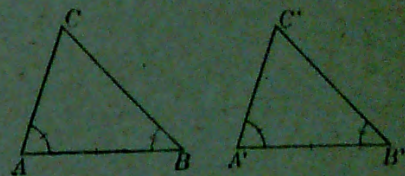
79. **Dois triangulos são eguaes,** *quando têm um lado egual adjacente a dois angulos respectivamente eguaes* (fig. 58).

Hyp.: $AB = A'B'$; $A = A'$; $B = B'$.

These: Os triangulos ABC e $A'B'C'$ são eguaes.

Demonstração: Transportemos mentalmente o triangulo $A'B'C'$ sobre ABC, de modo que o lado $A'B'$ coincida com seu egual AB, e que o ponto C' fique do mesmo lado que C.

Fig. 58

Sendo eguaes os angulos A e A', o lado $A'C'$ tomará a direcção AC; assim tambem, devido á egualdade dos angulos B e B', o lado $B'C'$ tomará a direcção BC; e o ponto C', devendo se achar sobre AC e BC simultaneamente, cahirá forçosamente sobre o ponto C; logo, os triangulos são eguaes, porque coincidem todos os seus lados e vertices.

THEOREMA

80. **Dois triangulos são eguaes,** *quando têm dois lados respectivamente eguaes e tambem egual o angulo comprehendido* (fig. 59).

Colloque-se um triangulo sobre outro, de modo que os angulos eguaes A e A' coincidam; neste caso, sendo $AB = A'B'$, e $AC = A'C'$, os pontos B e C confundir-se-ão com B' e C' respectivamente; logo, os triangulos são eguaes, porque ha perfeita coincidencia de todas as suas partes.

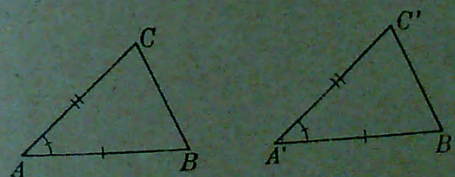



Fig. 59

THEOREMA

81. **Dois triangulos são eguaes**, *quando têm os tres lados respectivamente eguaes* (fig. 60).

Colloquemos o triangulo $A'B'C'$ sobre ABC, de modo que o lado $A'B'$ coincida com o seu egual AB, e que o ponto C' fique em C'', do outro lado do ponto C.

O triangulo ABC'' será uma reproducção do triangulo $A'B'C'$, e bastará, pois, para demonstrar o theorema, provar a egualdade dos triangulos ABC e ABC''. Ora, tracemos a recta CC''; o triangulo BCC'' é isosceles por hypothese, logo os angulos BCC'' e $BC''C$ são eguaes. O triangulo ACC'' é tambem isosceles por hypothese; logo, os angulos ACC'' e $AC''C$ são eguaes. Temos, pois:

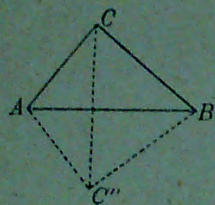



Fig. 60

$$BCC'' = BC''C$$
$$ACC'' = AC''C$$

Sommando ordenadamente, vem: $ACB = AC''B$.

Os triangulos ABC e ABC'' têm dois lados respectivamente eguaes, e egual o angulo comprehendido; logo (**80**), esses triangulos são eguaes.

Os tres ultimos theoremas constituem os tres casos fundamentaes da egualdade de triangulos.

THEOREMA

82. **Dois triangulos são eguaes**, *quando têm dois lados respectivamente eguaes, e tambem egual o angulo opposto ao maior desses lados* (fig. 61).

Baixemos do vertice commum aos lados eguaes a perpendicular ao lado opposto. Colloque-se agora o

triangulo ABC sobre $A'B'C'$, de modo que os angulos eguaes A e A' coincidam; o lado AB tomará a direcção $A'B'$ e o lado AC confundir-se-á com o seu egual $A'C'$; neste caso, as perpendiculares CD e $C'D'$ tambem coincidirão, porque de um ponto exterior a uma recta só se póde traçar uma unica perpendicular a essa recta (**28**). Os outros lados CB e $C'B'$, eguaes por hypothése, são duas obliquas que equidistam do pé da perpendicular; logo, $DB = D'B'$, e os pontos B e B' coincidem. São, pois, eguaes os dois triangulos porque coincidem todos os vertices.

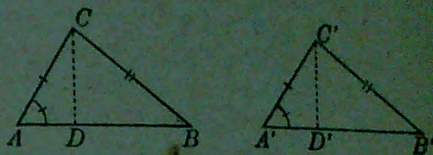



Fig. 61

83. COROLLARIOS. — **Dois triangulos rectangulos são eguaes:**

1.º *Quando têm eguaes a hypotenusa e um angulo agudo.*

2.º *Quando têm eguaes um catheto e um angulo agudo.*

3.º *Quando têm eguaes os dois cathetos.*

4.º *Quando têm eguaes um catheto e a hypotenusa* (fig. 62).

Com effeito: 1.º Si os triangulos rectangulos têm as hypotenusas eguaes e um angulo agudo egual, por exemplo $C = C'$, tambem serão eguaes os outros dois angulos agudos B e B', como complementos de angulos eguaes, e os dois triangulos são eguaes por terem um lado egual e os angulos adjacentes respectivamente eguaes (**79**).

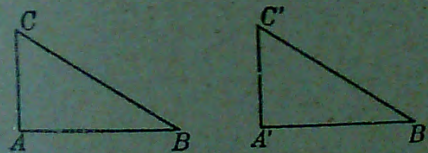



Fig. 62

2.º Este caso está comprehendido no anterior.

3.º Si os triangulos rectangulos têm os cathetos respectivamente eguaes, são eguaes, porque têm dois lados eguaes ę egual o angulo comprehendido (**80**).

4.º Si os triangulos têm as hypotenusas eguaes e um catheto egual, $AB = A'B'$ e $BC = B'C'$, fazendo coincidir os cathetos eguaes AB e $A'B'$, os outros dois cathetos coincidirão em direcção por serem perpendiculares, aos primeiros, e as hypotenusas tambem coincidirão, como obliquas eguaes do mesmo lado da perpendicular (**31**).

84. Observações. — 1.ª Em triangulos eguaes, aos angulos eguaes oppõem-se lados eguaes.

2.ª Dos theoremas precedentes sobre a egualdade dos triangulos, conclue-se facilmente que um triangulo é determinado, quando são conhecidos tres dos seus elementos, entrando pelo menos um lado. A possibilidade do triangulo exige tambem que um lado qualquer seja menor que a somma dos outros dois, e que a somma de dois angulos seja menor que dois rectos.

THEOREMA

85. *Si dois triangulos têm dois lados respectivamente eguaes, e os angulos comprehendidos por esses lados são deseguaes,* **ao maior angulo oppõe-se o maior lado** (fig. 63).

HYP.: $AB = ED$; $AC = EF$; $BAC > DEF$.

THESE: $BC > DF$.

DEMONSTRAÇÃO: Colloque-se o triangulo DEF sobre BAC, de modo que o lado EF coincida com o seu egual AC, e que o ponto D fique do mesmo lado da recta AC que o ponto

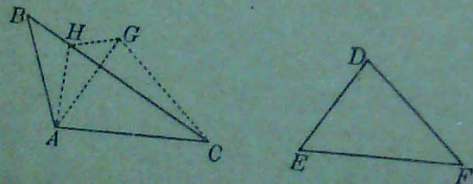



Fig. 63

B. Sendo o angulo $BAC > DEF$, o lado ED cahirá dentro do angulo BAC. Seja, pois, AG a posição que toma o lado ED e trace-se a recta GC. O triangulo GAC será uma reproducção do triangulo DEF e fica-se reduzido a demonstrar a desegualdade $BC > GC$. Para isto, trace-se a bissectriz AH do angulo BAG e a recta HG. Os triangulos BAH e GAH são eguaes, porque têm o lado AH commum, $AB = AG$ por hypothese, e o angulo $BAH = HAG$; logo, $BH = HG$.

No triangulo CGH temos: $CH + HG > CG$, ou $CB > CG$; logo, $CB > DF$.

86. RECIPROCO. — *Si dois triangulos têm dois lados respectivamente eguaes e os terceiros lados deseguaes,* **ao maior lado oppõe-se o maior angulo.**

Com effeito, o angulo A não póde ser egual nem menor que o angulo E; pois, si esses angulos fossem eguaes, os triangulos seriam eguaes pelo segundo caso, e os lados BC e DF seriam tambem eguaes contra a hypothese; e, si o angulo A fosse menor que E, seria o lado BC menor que DF, o que é tambem contra a hypothese; logo, o angulo A é necessariamente maior que o angulo E.

THEOREMA

87. *A recta que une os pontos medios de dois lados de um triangulo* **é parallela ao terceiro lado e egual á sua metade** (fig. 64).

Com effeito, traçando pelo ponto medio c do lado AB a parallela ca ao lado AC, basta demonstrar que a é o ponto medio de BC e que ca é a metade de AC. Traçando ab parallela a BA, formamos os dois triangulos Bca e abC, que são eguaes, porque $Bc = cA = ab$ (**53**), e os angulos adjacentes aos lados Bc e ab são tambem eguaes, uns como correspondentes e outros como

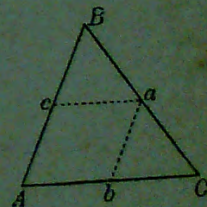



Fig. 64

tendo os lados parallelos no mesmo sentido. Da egualdade dos triangulos deduz-se:

$Ba = aC$, e $bC = ca = Ab$, o que demonstra o theorema.

THEOREMA

88. *Em todo triangulo,* **as tres medianas se cortam no mesmo ponto, que se acha aos dois terços de cada uma dellas a partir do vertice ou a um terço do lado** (fig. 65).

Sejam Bb e Cc duas medianas e D o ponto onde se cortam, o theorema ficará demonstrado si provarmos que $Db = \frac{1}{3} Bb$ e $Dc = \frac{1}{3} Cc$. Para isso, unamos os pontos medios e e f de BD e CD, e tracemos a recta cb; ef e cb serão parallelas a BC e eguaes á sua metade (**87**); logo, ellas são tambem eguaes e parallelas, e os triangulos cDb e eDf são, por conseguinte, eguaes (**79**). Temos, pois:

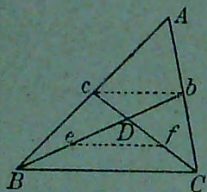



Fig. 65

$bD = De = eB$ e $cD = Df = fC$;

ou $Db = \frac{1}{3} Bb$ e $Dc = \frac{1}{3} Cc$, egualdades que demonstram o theorema.

THEOREMA

89. *Em todo triangulo, as tres mediatrizes* **concorrem em um ponto que equidista dos vertices** (fig. 66).

Com effeito, as perpendiculares DO e FO são concorrentes (**57**), e o ponto de encontro equidista dos pontos A e B e tambem de A e C, por pertencer ás perpendiculares levantadas ao meio de AB e AC (**33**); logo, o ponto O equidista dos tres vertices e pertence, por conseguinte, á perpendicular ao meio de BC (**34**).

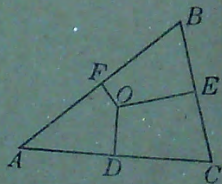



Fig. 66

THEOREMA

90. *As tres alturas de um triangulo* **concorrem em um mesmo ponto** (fig. 67).

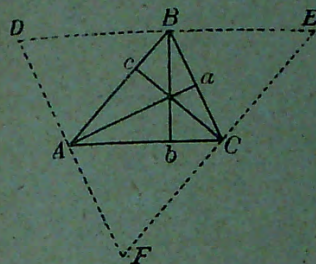



Fig. 67

Seja o triangulo ABC, e Aa, Bb, Cc, as alturas. Traçando pelos vertices uma parallela ao lado opposto, fórma-se o triangulo DEF, no qual A, B, C são os pontos medios dos seus lados, pois para o ponto B, por exemplo, tem-se:

$DB = AC = BE$ (**53**).

Assim, pois, as alturas do triangulo proposto são perpendiculares aos lados do triangulo DEF (**48**) nos seus pontos medios, e são concorrentes (**89**).

THEOREMA

91. *As tres bissectrizes de um triangulo* **concorrem em um mesmo ponto, que equidista dos tres lados** (fig. 68).

Com effeito, o ponto O, em que se cortam as bissectrizes dos angulos A e B, é um ponto que equidista dos tres lados e pertence, portanto, á bissectriz do terceiro angulo C (**36**).

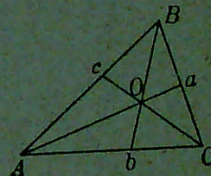



Fig. 68

92. PROBLEMA. — *Construir um triangulo, dados os tres lados* (fig. 69).

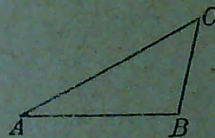
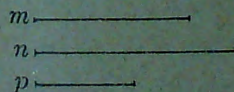



Fig. 69

Sejam os tres lados m, n, e p. Dos extremos de uma recta AB egual a qualquer um dos tres lados, m por exemplo, descrevem-se dois arcos com raios respectivamente eguaes a n e p, cujo ponto C de intersecção determina o terceiro vertice do triangulo ABC, que é o pedido.

NOTA. — Este problema será sempre possivel, si o maior dos tres lados fôr menor que a somma dos outros dois (**67**).

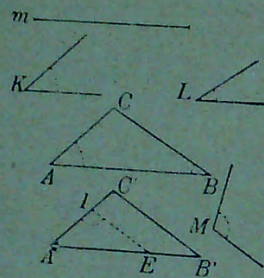
93. Problema. — *Construir um triangulo, dados dois lados e o angulo comprehendido* (fig. 70).

Sejam os lados m e n e o angulo K. No extremo de uma recta $AB = m$ constroe-se um angulo $A = K$ toma-se sobre o outro lado do angulo um comprimento $AC = n$, e tira-se BC; ABC é o triangulo que se procura.

Fig. 70

Nota. — Este problema é sempre possivel e determinado.

94. Problema. — *Construir um triangulo, dados um lado e dois angulos* (fig. 71).

Podemos considerar dois casos:

1.º Que os angulos dados K e L sejam adjacentes ao lado dado m;

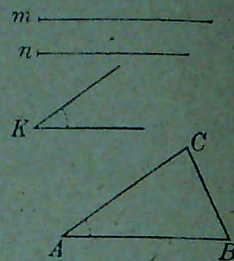
2.º Que um dos angulos K seja adjacente, e o outro L opposto ao lado dado m.

Fig. 71

1.º caso. Nos extremos de uma recta $AB = m$ constroem-se dois angulos dados A e B eguaes aos angulos dados K e L, e o triangulo ABC assim formado é o que se procura.

2.º caso. No extremo A' de uma recta $A'B' = m$ constroe-se um angulo $A' = K$; por um ponto qualquer I do lado $A'C'$, traça-se uma recta IE, que forme com o lado $A'C'$ um angulo $A'IE$ egual a M; pelo ponto B' traça-se $B'C'$ parallela a IE, e tem-se o triangulo $A'B'C'$ procurado.

Nota. — Este problema será sempre possivel, si a somma dos dois angulos dados é menor que dois rectos.

95. Problema. — *Dados dois lados e o angulo opposto a um desses lados, construir o triangulo* (fig. 72).

Sejam os lados m e n e o angulo K opposto ao lado dado m.

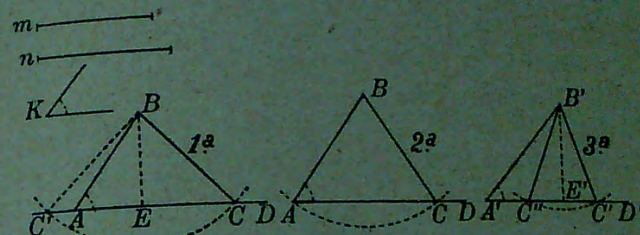



Fig. 72

Construa-se um angulo $BAD = K$ (1.ª fig.), tome-se sobre um dos pontos o comprimento $AB = n$, e do ponto B descreva-se com o raio m um arco que, em geral, cortará o lado AD em dois pontos C e C'; tire-se BC, e o triangulo ABC é o pedido.

Discussão. — Si o lado m (1.ª fig.), opposto ao angulo K, fôr maior que o lado n, adjacente a esse angulo, o arco descripto de B cortará a recta indefinida AD em dois pontos C e C', de um e de outro lado de A; pois, si do ponto B baixarmos a perpendicular BE á recta AD, sendo o raio maior que BA, os pontos C e C' distarão de E mais que o ponto A (**31**); logo, o ponto A estará comprehendido entre os dois pontos C e C', e o triangulo ABC será o unico que satisfaz o problema.

Si o lado m (2.ª fig.) fôr egual a n (devendo então ser agudo o angulo K), o segundo ponto de intersecção do arco com AD coincidirá com A, e o triangulo isosceles ABC será o que se procura.

Si o lado m (3.ª fig.) fôr menor que n (o que exige ainda que o angulo seja agudo), porém maior que a perpendicular BE, o arco cortará a recta AD em dois pontos C' e C'' á direita de A', e, como os dois triangulos $A'B'C'$ e $A'B'C''$ satisfazem o problema, terá este duas soluções.

Si o lado m fôr egual á perpendicular $B'E'$, obtem-se o triangulo rectangulo $A'B'E'$, unica solução da questão.

Finalmente, si o lado m fôr menor que a perpendicular $B'E'$, o problema é impossivel, e não terá solução alguma.

Exercicios

THEOREMAS A DEMONSTRAR:

1. Si se unem entre si os pontos medios dos lados de um triangulo, fica este decomposto em quatro triangulos eguaes.

2. A recta que une os pontos medios de dois lados de um triangulo e a mediana correspondente ao terceiro lado se dividem mutuamente em partes eguaes.

3. A recta que une um vertice de um triangulo ao ponto medio da mediana correspondente a outro vertice, divide o lado opposto ao primeiro vertice em duas partes, uma das quaes é dupla da outra.

4. A bissectriz de um angulo de um triangulo fórma com o lado opposto dois angulos, cuja differença é egual á dos outros dois angulos do triangulo.

5. O angulo formado por duas bissectrizes interiores de um triangulo, é egual a um angulo recto augmentado da metade do terceiro angulo do mesmo triangulo.

6. O angulo que formam a bissectriz e a altura que partem de um mesmo vertice de um triangulo, é egual á semi-differença dos angulos dos outros dois vertices.

7. Si um ponto interior a um triangulo se une aos tres vertices, a somma destas tres rectas está comprehendida entre o perimetro e o semi-perimetro.

8. Uma altura de um triangulo é menor que a semi-somma dos dois lados que partem do mesmo vertice.

9. A somma das tres alturas de um triangulo é menor que o perimetro do mesmo.

10. Uma mediana de um triangulo é menor que a semi-somma dos dois lados que partem do mesmo vertice.

11. Si pelo ponto de concurso das tres medianas de um triangulo se traça uma recta qualquer, a somma das distancias a esta recta dos dois vertices que ficam do mesmo lado da recta é egual á distancia do outro vertice á mesma recta.

12. A somma das distancias dos tres vertices de um triangulo a uma recta qualquer situada no seu plano, é egual ao triplo da distancia do ponto de concurso das tres medianas a essa mesma recta.

13. Si de um ponto qualquer da base de um triangulo isosceles se traçam perpendiculares aos lados eguaes, a somma dessas perpendiculares é egual á altura que parte de um dos vertices da base.

14. Si de um ponto interior a um triangulo equilatero se traçam perpendiculares aos tres lados, a somma destas perpendiculares é constante e egual á altura do triangulo.

PROBLEMAS A RESOLVER:

I. Construir um triangulo com os dados seguintes:

1. Dois lados e a mediana que cae sobre um delles.
2. Dois lados e a mediana comprehendida entre elles.
3. Um lado e as duas medianas que partem dos extremos dos lados.
4. Um lado e duas medianas, uma das quaes cae sobre o lado.
5. As tres medianas.
6. Dois lados e a altura que cae sobre um delles.
7. Dois lados e a altura comprehendida.
8. Os pés das tres medianas.
9. Os pés das tres alturas.
10. O perimetro e os angulos.

II. Construir um triangulo rectangulo, sendo dados:

1. Um catheto e um angulo agudo.
2. A hypotenusa e um angulo agudo.
3. Os dois cathetos.
4. A hypotenusa e um catheto.

III. Construir um triangulo isosceles, sendo dados:

1. Um lado e a base.
2. Um lado e um dos dois angulos eguaes.
3. Um lado e o angulo no vertice.
4. A base e um dos angulos adjacentes.
5. A base e o angulo opposto.
6. A base e a altura.
7. A altura e um dos lados eguaes.

IV. Construir um triangulo equilatero, sendo dados:

1. O lado.
2. O perimetro.
3. A altura.

EXERCICIOS NUMERICOS:

1. O perimetro de um triangulo é de 45 m. e um dos lados vale 15 m. Qual é o comprimento de cada um dos outros lados, si differem de 6 m.?

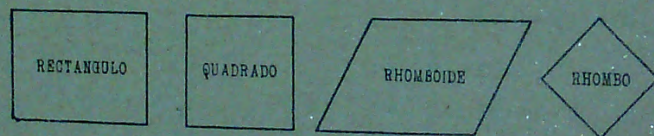
2. Dadas 2 rectas, uma de 12 m. e outra de 15 m., pede-se: 1.º, a menor linha com que se possa construir um triangulo com as rectas dadas; 2.º, a maior.

II. — Quadrilateros

96. Classificação. — Os quadrilateros, attendendo á posição respectiva de seus lados oppostos, classificam-se em *trapezoides, trapezios* e *parallelogrammos*.

O quadrilatero denomina-se *trapezoide*, quando não tem lado algum parallelo a outro; *trapezio*, quando tem sómente dois lados parallelos; e *parallelogrammo*, quando os quatro lados são parallelos dois a dois.

O *trapezio* chama-se *isosceles*, si os lados não parallelos são eguaes, e chama-se *rectangulo*, si os lados parallelos são perpendiculares a um dos outros dois lados. Em qualquer caso, os lados parallelos são as *bases* do trapezio, e a *altura* é a distancia entre as bases.

Os *parallelogrammos* dividem-se em *rectangulos* e *obliquangulos*, segundo os lados consecutivos são perpendiculares ou obliquos entre si. Os parallelogrammos rectangulos são dois: o *rectangulo* e o *quadrado;* e os obliquangulos são tambem dois: o *rhomboide* e o *rhombo* ou *losango*. O quadrado é um rectangulo de lados eguaes, e o rhombo é, por sua vez, um rhomboide de lados eguaes.

Base de um parallelogrammo é um qualquer dos seus lados, e *altura* é a distancia entre a base e o lado opposto.

THEOREMA

97. *A somma dos quatro angulos de um quadrilatero* **é egual a quatro rectos** (fig. 73).

Com effeito, seja qual fôr o quadrilatero, tirando uma diagonal BD, ficará dividido em dois triangulos ABD e BCD, cujos angulos compõem evidentemente os angulos do quadrilatero; logo, a somma dos angulos de um quadrilatero qualquer é egual á somma dos angulos de dois triangulos, isto é, egual a quatro rectos.

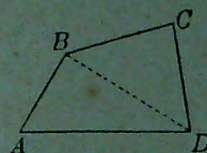



Fig. 73

THEOREMA

98. *Em todo parallelogrammo:* **1.º Os lados oppostos são eguaes; 2.º Os angulos oppostos são eguaes; 3.º Os angulos que têm um lado commum são supplementares; 4.º As diagonaes cortam-se em duas partes eguaes** (fig. 74).

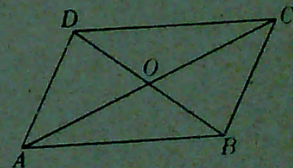
Com effeito: 1.º Os lados oppostos são eguaes, porque são partes de parallelas comprehendidas entre parallelas (**53**).

2.º Os angulos oppostos são eguaes, porque têm os seus lados parallelos e dirigidos em sentido opposto (**55**).

3.º Os angulos que têm um lado commum são supplementares, porque são angulos internos do mesmo lado da secante (**52**).

4.º As diagonaes se cortam em duas partes eguaes, porque os triangulos OAD e OBC são eguaes, como tendo um lado egual $AD = BC$ e os angulos adjacentes eguaes, como alternos entre parallelas; e da egualdade dos triangulos conclue-se que:

Fig. 74

$$OA = OC \text{ e } OB = OD.$$

THEOREMA RECIPROCO

99. Um quadrilatero é parallelogrammo *quando se verifica uma das condições seguintes: 1.ª Si os lados oppostos são eguaes dois a dois; 2.ª Si dois lados oppostos são eguaes e parallelos; 3.ª Si os angulos oppostos são eguaes dois a dois; 4.ª Si os angulos que têm um lado commum são supplementares; 5.ª Si as diagonaes se cortam ao meio* (fig. 74).

1.ª Tirando a diagonal BD, si os lados oppostos são eguaes, os triangulos ABD e BCD são eguaes, e por conseguinte os angulos BDC e ABD, ADB e DBC, que se oppõem a lados eguaes, são tambem eguaes; e como esses angulos occupam a posição de alternos, conclue-se que AD e BC, bem como AB e CD são parallelas, e o quadrilatero é um parallelogrammo.

2.ª Si dois lados oppostos são eguaes e parallelos, por exemplo os lados AB e CD, os triangulos ABD e BCD são eguaes (**80**); logo, os angulos alternos ADB e DBC são eguaes, e as rectas AD e BC são parallelas.

3.ª Si os angulos oppostos são eguaes, temos por hypothese:

$$A = C \text{ e } B = D.$$

Da egualdade $A + B + C + D = 4$ rectos (**97**) e das egualdades da hypothese conclue-se:

$2A + 2B = 4$ rectos ou $A + B = 2$ rectos;

$2A + 2D = 4$ rectos ou $A + D = 2$ rectos;

Logo (**51**), os lados AB e CD, bem como AD e BC são parallelos, e o quadrilatero é um parallelogrammo.

4.ª Si os angulos A e D são supplementares, os lados AB e CD são parallelos (**51**); e sendo supplementares os angulos A e B, são parallelos os outros dois lados.

5.ª Si as diagonaes se cortam ao meio, são eguaes os triangulos AOD e BOC, assim como AOB e DOC (**80**); logo, $AD = BC$ e $AB = CD$, e a figura é um parallelogrammo.

THEOREMA

100. *As diagonaes de um losango* **são perpendiculares entre si e bissectrizes dos angulos oppostos** (fig. 75).

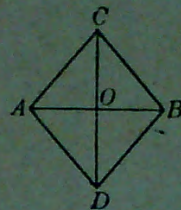



Fig. 75

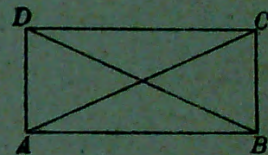
Com effeito, os pontos C e D equidistam dos pontos A e B; logo (**35**), as diagonaes são perpendiculares entre si; mas então os triangulos rectangulos AOC e AOD são eguaes; logo, ainda, AB é bissectriz do angulo A.

THEOREMA

101. *As diagonaes de um rectangulo* **são eguaes** (fig. 76).

Os triangulos ABD e ABC são eguaes (**80**), e por conseguinte são eguaes os lados AC e BD, que são as diagonaes do rectangulo, como oppostos a angulos eguaes.

Fig. 76

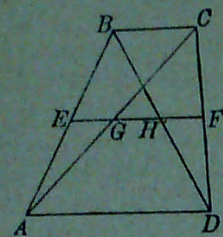
Os theoremas reciprocos dos dois ultimos theoremas são verdadeiros e faceis de demonstrar.

102. Escolio. — Como um quadrado tem os angulos rectos e os lados eguaes, é rectangulo e losango ao mesmo tempo, e tem, por conseguinte, as propriedades destes parallelogrammos; assim, as diagonaes de um quadrado se cortam ao meio, são eguaes, perpendiculares entre si e bissectrizes dos angulos oppostos.

THEOREMA

103. *A recta que une os pontos medios dos lados não parallelos de um trapezio*, **é parallela ás bases e egual á sua semi-somma** (fig. 77).

HYP.: EF une os pontos medios dos lados AB e CD

THESE: 1.º EF é parallela a AD e BC; 2.º $EF = \frac{AD + BC}{2}$.

DEMONSTRAÇÃO: Seja o trapezio $ABCD$, tendo AC e BD para diagonaes.

No triangulo ABD tiremos a recta EH pelos pontos medios dos lados AB e BD; esta recta é parallela a AD e egual á sua metade (87). O prolongamento de EH, que é HF, é parallelo a BC e egual á sua metade. Logo, EF é parallela ás bases AD e BC, e

$$EF = EH + HF = \frac{1}{2} AD + \frac{1}{2} BC,$$

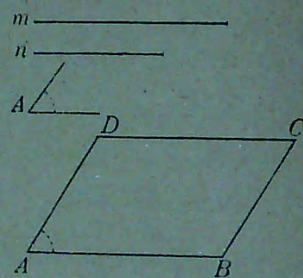
ou $\frac{AD+BC}{2}$. Q. E. D.

Fig. 77

104. PROBLEMA. — *Construir um parallelogrammo, conhecendo dois lados e o angulo comprehendido* (fig. 78).

Sobre os lados de um angulo A egual ao angulo dado, tomam-se, a partir do vertice, as duas distancias AB e AD, eguaes aos lados conhecidos m e n; depois, dos pontos B e D traçam-se as rectas BC e DC respectivamente parallelas a AD e AB, que completarão o parallelogrammo $ABCD$ procurado.

Fig. 78

Si o parallelogrammo fosse um losango, ou um rectangulo, ou um quadrado, seria sufficiente conhecer um lado e um angulo para o primeiro, os dois lados consecutivos para o segundo, e apenas o lado para o caso do quadrado.

Exercicios

THEOREMAS A DEMONSTRAR:

1. Os pontos medios dos lados de um quadrilatero são os vertices de um parallelogrammo metade do quadrilatero.

2. Si pelos vertices de um quadrilatero se tiram parallelas a suas diagonaes, obtem-se um parallelogrammo duplo do quadrilatero.

3. As bissectrizes dos angulos interiores de um quadrilatero convexo, ou as bissectrizes exteriores do mesmo, cortam-se formando outro quadrilatero cujos angulos oppostos são supplementares.

4. As rectas que unem um vertice de um parallelogrammo aos pontos medios dos lados cortam a diagonal opposta em tres partes eguaes.

5. As bissectrizes interiores de um parallelogrammo, ou as bissectrizes exteriores do mesmo, cortam-se formando um rectangulo.

6. Si um parallelogrammo está inscripto em um outro, as diagonaes de ambos passam pelo mesmo ponto.

7. Si uma recta qualquer passa por um vertice de um parallelogrammo, e se traçam perpendiculares a ella dos outros vertices, a perpendicular intermedia será egual á differença das outras duas, si a recta cortar a figura; e á sua somma, si fôr exterior.

8. Si de um ponto qualquer situado no plano de um rhombo se traçam perpendiculares a seus lados, a somma ou differença das perpendiculares a dois lados adjacentes é egual á somma ou differença das outras duas.

9. As bissectrizes interiores de um rectangulo, ou as bissectrizes exteriores do mesmo cortam-se, formando um quadrado.

10. Si, a partir de cada vertice de um quadrado no mesmo sentido, se tomam comprimentos eguaes, os pontos obtidos são os vertices de outro quadrado.

PROBLEMAS A RESOLVER:

I. Construir um trapezio com os dados seguintes:

1. Os quatro lados.
2. As bases e os angulos.
3. Uma base, um lado e os angulos da base.

II. Construir um parallelogrammo sendo dados:

1. Dois lados e uma diagonal.
2. Um lado e as diagonaes.
3. As diagonaes e o angulo que ellas formam.

III. **1.** *Construir um rhombo, sendo dados* o lado e a somma ou differença das diagonaes.

IV. Construir um rectangulo, sendo dados:

1. O perimetro e a somma dos quadrados de dois lados adjacentes.

2. O angulo das diagonaes e a somma ou differença dos dois lados.

V. **1.** *Construir um quadrado, conhecendo* a somma ou a differença da diagonal e o lado.

2. A partir de um ponto de um lado de um quadrilatero, determinar o caminho mais curto para voltar a elle, tocando nos outros lados.

3. Em um parallelogrammo dado inscrever um quadrado.

4. Inscrever, em um quadrado dado, outro de lado conhecido.

EXERCICIOS NUMERICOS:

1. Construir um trapezio isosceles, tendo por altura 22 e cujas bases tenham 40 e 24.

2. Construir um quadrado cuja diagonal seja egual a 50.

3. Construir um quadrilatero cujos lados sejam eguaes a 20, 25, 30 e 32, sabendo-se que a diagonal que une os vertices não adjacentes aos dois primeiros lados vale 28.

III. — Propriedades, egualdade e symetria dos polygonos em geral

THEOREMA

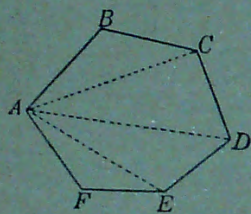
105. *A somma dos angulos de um polygono convexo* **é egual a tantas vezes dois rectos quantos lados tem o polygono menos dois** (fig. 79).

HYP.: Seja o polygono convexo $ABCDEF$.

THESE: $S = (n - 2)$ 2 rectos, sendo n o numero de lados.

DEMONSTRAÇÃO: Dirigindo diagonaes de um vertice qualquer A aos vertices não adjacentes, o polygono fica dividido em triangulos, tendo todos um vertice commum A, e tendo para bases os lados do polygono menos os dois que formam o angulo A; logo, o numero desses triangulos é egual a tantos quantos são os lados do polygono menos dois. Ora, sendo os angulos do polygono todos formados dos angulos desses triangulos, conclue-se que a somma S dos angulos do polygono convexo é egual a tantas vezes dois rectos quantos são os triangulos, isto é, tantas vezes dois rectos quantos lados tem o polygono menos dois.

Fig. 79

106. Escolio. — Si o polygono fôr regular, sendo os angulos todos eguaes, temos que o valor de um angulo será dado pela expressão $\frac{(n-2)\,2R}{n}$.

THEOREMA

107. *A somma dos angulos exteriores, que se obtem prolongando no mesmo sentido todos os lados de um polygono convexo,* **é egual a quatro rectos** (fig. 80).

Prolongando todos os lados do polygono, vê-se que em cada vertice ficam formados dois angulos, um interior e outro exterior, cuja somma vale dois rectos; logo, a somma dos angulos interiores e exteriores do polygono será $2Rn$. Subtrahindo desta somma o valor $2Rn - 4R$ dos angulos interiores, o resto será a somma dos angulos exteriores, isto é, $2Rn - (2Rn - 4R) = 2Rn - 2Rn + 4R = 4R$.

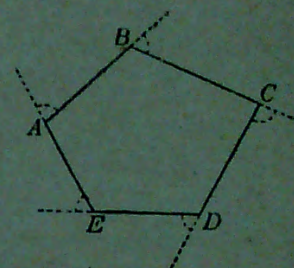



Fig. 80

108. COROLLARIO. — *Um polygono convexo* **não póde ter mais de tres angulos agudos,** pois, do contrario, os seus angulos adjacentes exteriores seriam obtusos e a sua somma seria maior que quatro rectos.

THEOREMA

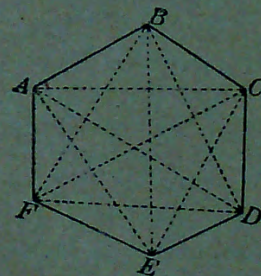
109. *O numero total de diagonaes de um polygono convexo* **é egual a** $\frac{(\mathbf{n-3})\,\mathbf{n}}{\mathbf{2}}$ (fig. 81).

Com effeito, do vertice A, por exemplo, podem tirar-se diagonaes a todos os outros menos aos dois adjacentes B e F; logo, de um vertice qualquer, podem tirar-se $n - 2$ diagonaes, e dos n vertices se poderão tirar $n\,(n - 3)$ diagonaes. Mas, attendendo a que o numero de diagonaes ficará assim tomado duas vezes, porque a diagonal AC, por exemplo, tirada do vertice A ao vertice C, se confunde com a diagonal CA, tirada do vertice C ao vertice A, con-

Fig. 81

clue-se que o numero de diagonaes distinctas, que se podem traçar em um polygono, será representado pela expressão $n \dfrac{(n-3)}{2}$.

THEOREMA

110. Dois polygonos são eguaes, *quando são compostos do mesmo numero de triangulos respectivamente eguaes e egualmente dispostos* (fig. 82).

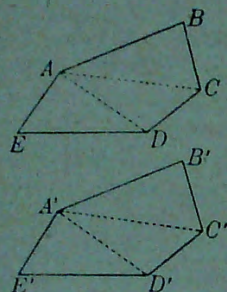



Fig. 82

Com effeito, collocando AB sobre $A'B'$, coincidirão os triangulos eguaes ABC e $A'B'C'$; por ficarem superpostos os lados AC e $A'C'$, coincidirão tambem os triangulos ACD e $A'C'D'$; e assim successivamente irão coincidindo as porções dos dois polygonos, em virtude de se acharem dispostos na mesma ordem os triangulos eguaes.

111. Escolio. — Si a egualdade dos polygonos depende da egualdade dos triangulos respectivos que os compõem, é evidente que as condições de egualdade dos primeiros dependem das condições de egualdade destes. Ora, a egualdade dos dois primeiros triangulos requer tres condições (**84**), e os outros triangulos, apenas duas, por terem cada um com o anterior um lado commum; e como o numero de triangulos é $n-2$, resultam tres condições para os primeiros e 2 $(n-3)$ para os triangulos restantes, isto é: $3+2(n-3)=2n-3$; logo, o numero total de condições que requer a egualdade de dois polygonos é expresso por $2n-3$.

112. COROLLARIO 1.º — **Dois polygonos de n lados são eguaes:** 1.º *Quando têm eguaes todos os lados e n — 3 angulos consecutivos;* 2.º *Quando têm eguaes n — 1 lados e os n — 2 angulos formados por elles;* 3.º *Quando têm eguaes n — 2 lados seguidos e os angulos adjacentes a esses lados.*

113. COROLLARIO 2.º — **Dois quadrilateros são eguaes,** *quando têm respectivamente eguaes e egualmente dispostos:*

1.º *Os quatro lados e um angulo;* 2.º *Tres lados e os dois angulos comprehendidos;* 3.º *Dois lados consecutivos e os tres angulos adjacentes.*

114. COROLLARIO 3.º — **Dois trapezios são eguaes,** *si têm respectivamente eguaes e egualmente dispostos:*

1.º *As bases, um lado e um dos angulos adjacentes a este;* 2.º *Uma base, um lado e os angulos adjacentes á base.*

115. COROLLARIO 4.º — **Dois parallelogrammos nas suas varias especies são eguaes:** 1.º **Dois rhomboides,** *quando têm respectivamente eguaes dois lados e o angulo comprehendido;* 2.º **Dois rhombos,** *quando têm respectivamente eguaes um lado e um angulo;* 3.º **Dois rectangulos,** *quando têm respectivamente eguaes dois lados consecutivos;* 4.º **Dois quadrados,** *quando têm um lado egual.*

116. Symetria nos polygonos. — Dois pontos são symetricos em relação a outro ponto, chamado *centro de symetria*, quando este divide em duas partes eguaes a recta que une os dois primeiros pontos; e são symetricos em relação a uma recta, chamada então *eixo de symetria*, quando esta recta é perpendicular ao meio da recta que une os dois pontos.

Assim, na fig. 83 os pontos A, B, C, são symetricos a A', B', C', em relação ao centro O, ou ao eixo XX'. Dois polygonos são symetricos em relação a um centro ou a um eixo, quando os vertices de um são respectivamente symetricos aos vertices de outro em relação ao centro ou ao eixo.

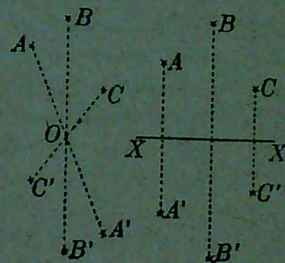



Fig. 83

THEOREMA

117. *Dois polygonos symetricos em relação a um centro ou a um eixo* **são eguaes** (figs. 84 e 85.)

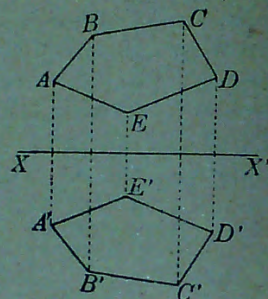
Fig. 84

1.º Sejam $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ dois polygonos symetricos em relação ao ponto O, de sorte que o ponto O é o meio de AA', BB', CC', etc. Fazendo girar o polygono $ABCDE$ em torno do ponto O até que A venha a coincidir com seu symetrico A', vê-se facilmente que se dá tambem a coincidencia dos outros vertices.

Logo, os dois polygonos são eguaes.

2.º Sejam $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ dois polygonos symetricos em relação ao eixo XX', de sorte que XX' é perpendicular ao meio de AA', BB', CC', etc.

Fig. 85

Fazendo dobrar o plano de $ABCDE$ pelo eixo XX' como charneira, vê-se facilmente que A cae em A', B em B', C em C', etc. Logo, o polygono $ABCDE$ é egual a $A'B'C'D'E'$.

118. Observação. — Releva notar que dois polygonos symetricos em relação a um centro podem ser applicados um sobre o outro, sem ser preciso fazel-os sahir do plano; costuma-se dizer neste caso que são *directamente eguaes*.

Ao passo que para fazer a coincidencia de dois polygonos symetricos em relação a um eixo, é preciso fazel-os sahir do mesmo plano; diz-se então que são *inversamente eguaes*.

Vê-se, pois, que a symetria, que estamos considerando nos polygonos, consiste unicamente na sua posição relativa; e que dois polygonos eguaes podem sel-o *directa* ou *inversamente*, segundo a maneira de fazer a sua coincidencia.

119. PROBLEMA. — *Construir um polygono egual a outro.*

Podem empregar-se, entre outros, os processos seguintes:

1.º Fig. 86. Traça-se uma recta $A'B' = AB$; em B' fórma-se um angulo $B' = B$ e toma-se $B'C' = BC$; em C' constroe-se um angulo $C' = C$ e toma-se $C'D' = CD$, e assim se continúa até obter o ponto F', que se une com A'.

Este processo é o menos exacto.

Fig. 86

2.º Fig. 86. Decompõe-se o polygono em triangulos por meio de diagonaes que partam do vertice A, por exemplo, e constroem-se depois os triangulos $A'B'C'$, $A'C'D'$..., respectivamente eguaes a ABC, ACD..., e dispostos na mesma ordem.

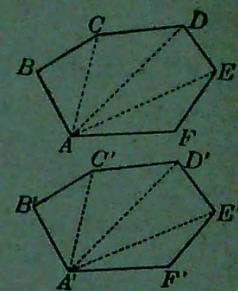
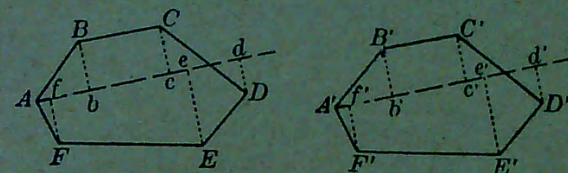



Fig. 87

3.º Fig. 87. Traça-se uma recta qualquer Ad, e de todos os vertices as perpendiculares a ella Ff, Bb, Ee, etc.; depois, sobre uma recta qualquer $A'd'$, tomam-se as distancias $A'f' = Af$, $A'b' = Ab$...; pelos pontos obtidos levantam-se perpendiculares respectivamente eguaes ás que partem de B, C, D..., e deste modo obtem-se uma serie de pontos que, unidos dois a dois, produzem um polygono egual ao dado. Este processo é mais exacto e expedito que os anteriores.

4.º Constroe-se o polygono symetrico do proposto em relação a um eixo ou a um centro.

Exercicios

RESOLVER OS PROBLEMAS SEGUINTES:

1. Construir um polygono, conhecendo em posição as perpendiculares levantadas aos lados nos seus pontos medios.

2. Valendo 50 rectos a somma dos angulos interiores de um polygono, quantos lados tem e quantas diagonaes podem traçar-se?

CAPITULO TERCEIRO

Linhas proporcionaes e semelhança dos polygonos

I. — Linhas proporcionaes

120. Definições. — *Linhas proporcionaes* são aquellas cujos valores numericos, expressos em relação á mesma unidade, formam uma proporção ou uma serie de razões eguaes.

Duas linhas a e b são *directamente proporcionaes* ou simplesmente proporcionaes a outras duas c e d, quando a razão $\frac{a}{b}$ entre a primeira e a segunda é egual á razão $\frac{c}{d}$ entre a terceira e a quarta. *São inversamente proporcionaes*, quando a razão $\frac{a}{b}$ entre a primeira e a segunda é egual á razão $\frac{d}{c}$ entre a quarta e a terceira. E são *reciprocamente proporcionaes*, quando as duas primeiras formam os extremos de uma proporção, e as outras duas os meios, ou vice-versa, como $\frac{a}{c}=\frac{d}{b}$.

Quarta proporcional a tres rectas dadas, é outra recta que fórma com ellas uma proporção. *Meia proporcional* entre duas rectas dadas, é outra recta que fórma com essas duas uma proporção continua, sendo ella o termo que se repete. E *terceira proporcional* a duas rectas dadas, é outra recta que fórma com ellas uma proporção continua, sendo uma das rectas dadas o termo que se repete.

THEOREMA

121. *Dados dois pontos*, **existem sempre sobre a recta indefinida que os une outros dois pontos, e unicamente dois, para os quaes as razões das distancias de cada um delles aos dois pontos dados são eguaes em valor absoluto a uma razão determinada** (fig. 88).

Sejam os pontos A e B, situados sobre a recta indefinida XY, e representemos por M e M' os pontos procurados.

É preciso provar que $\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}=\frac{\alpha}{\beta}$, sendo $\frac{\alpha}{\beta}$ a razão dada.

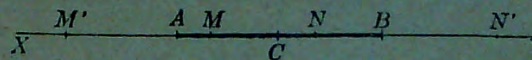
Com effeito, consideremos um ponto movel M, percorrendo a recta XY no sentido positivo, que supporemos da esquerda para a direita. No movimento, qualquer que seja a posição do ponto M, teremos sempre, levando em conta os signaes dos termos:

M' A M N B N'
X C Y

Fig. 88

$$\frac{MA}{MB}=\frac{MB-AB}{MB}=1-\frac{AB}{MB} \quad (1)$$

e a expressão (1) variará continuamente do seguinte modo:

Quando o ponto M está infinitamente afastado á esquerda do ponto A, o denominador MB é infinitamente grande; por conseguinte, sendo o valor da fracção $\frac{AB}{MB}$ infinitamente pequeno, a razão $\frac{MA}{MB}$ considera-se egual á unidade. No movimento, o ponto movel M vae se aproximando de A, pelo que MB diminue, tendendo para o valor AB; por conseguinte, a fracção $\frac{AB}{MB}$ augmenta, tendendo para a unidade, e a razão $\frac{MA}{MB}$ diminue até 0, cujo valor attinge quando M coincide com A. Logo, á esquerda de A, a razão $\frac{MA}{MB}$ decresce continuamente desde 1 até 0, quando o ponto movel M se desloca desde o ponto infinitamente á esquerda de A até coincidir com este ponto.

Continuando o movimento de M além de A, até o ponto B, vê-se que a fracção $\frac{AB}{MB}$ augmenta de uma maneira continua desde 1 até ∞, porquanto o numerador é constante e o denominador MB diminue até 0, e terá o valor egual a 2 quando M se achar no ponto medio C de AB. Logo, a razão $\frac{MA}{MB}$, quando o ponto M partindo de A se desloca até ao ponto B, diminue continuamente desde 0 até $-\infty$, tomando o valor -1 quando M coincidir com o ponto medio de AB.

Continuando ainda o movimento de M, sempre no sentido positivo, á direita de B, é evidente que a fracção

$\frac{AB}{MB}$ passa bruscamente do valor $+\infty$ para $-\infty$ e vae crescendo continuamente até 0, valor que terá quando M se achar infinitamente afastado á direita de B. Por conseguinte, a razão considerada $\frac{MA}{MB}$ decresce de uma maneira continua, quando o ponto movel M se desloca á direita de B, desde o valor $+\infty$ até 1.

Em resumo: A razão considerada $\frac{MA}{MB}$ toma á esquerda do ponto C duas vezes todos os valores numericos $\frac{\alpha}{\beta}$, menores que 1, e tambem duas vezes todos os valores numericos superiores a 1, quando á direita do mesmo ponto medio C de AB. Os valores negativos correspondem ao intervallo AB, e os positivos á esquerda de A e á direita de B.

Por conseguinte, si a razão $\frac{\alpha}{\beta}$ fôr menor que 1, os dois pontos estarão á esquerda de C, sendo um delles no intervallo AC e o outro á esquerda de A, taes como M e M', satisfazendo a razão:

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{M'A}{M'B} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad (2)$$

e si fôr maior que 1, os dois pontos estarão á direita de C, taes como N e N', satisfazendo a razão:

$$\frac{NA}{NB} = -\frac{N'A}{N'B} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Cada um desses pontos divide o segmento AB na razão dada; quando o ponto é interior, os segmentos que se obtêm chamam-se *additivos;* e quando exterior, *subtractivos;* pois, no primeiro caso é preciso sommal-os e no segundo subtrahil-os para se obter o segmento AB.

122. Observação. — Attendendo ao signal dos segmentos, vê-se que só existe um ponto que divide um segmento numa razão dada.

123. Proporção harmonica. — Quando dois pontos, taes como M e M', dividem o segmento AB de tal modo que os segmentos additivos são proporcionaes aos subtractivos, diz-se que elles dividem *harmonicamente* o segmento AB, ou que são *conjugados harmonicos* em relação a AB.

Como a expressão (2) póde escrever-se:

$$\frac{AM}{AM'} = -\frac{BM}{BM'},$$

vê-se que, por sua vez, os pontos A e B dividem tambem harmonicamente o segmento MM', ou que são conjugados harmonicos em relação ao segmento MM'.

A proporção (2) chama-se *proporção harmonica* (*) e escreve-se communmente da seguinte fórma:

$$\frac{MA}{MB} : \frac{M'A}{M'B} = -1.$$

THEOREMA

124. *As parallelas que determinam partes eguaes sobre uma recta dada,* **determinam tambem partes eguaes sobre toda outra recta que as corta** (fig. 89).

HYP.: As parallelas AA', BB', CC', DD' determinam sobre a recta AD as partes eguaes $AB = BC = CD$.

THESE: $A'B' = B'C' = C'D'$.

DEMONSTRAÇÃO: Tracemos pelos pontos de divisão da recta AD as parallelas Am, Bn e Cp á recta $A'D'$, que serão tambem parallelas entre si. Os triangulos ABm, BCn e CDp, que têm o lado $AB = BC = CD$ por hypothese, e os angulos adjacentes eguaes como correspondentes entre parallelas, são eguaes; logo, $Am = Bn = Cp$. Porém, $Am = A'B'$, $Bn = B'C'$ e $Cp = C'D'$, por serem lados oppostos de parallelogrammos; por conseguinte, $A'B' = B'C' = C'D'$.

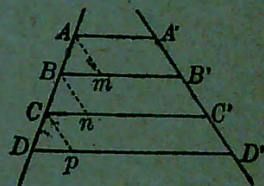



Fig. 89

THEOREMA

125. *A parallela a um lado de um triangulo,* **divide os outros dois lados em partes proporcionaes** (fig. 90).

(*) Os comprimentos de uma corda vibrante dando as tres notas *do, mi, sol,* que constituem o accorde perfeito maior, são proporcionaes a 1, $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{3}$ que satisfazem á relação da proporção harmonica.